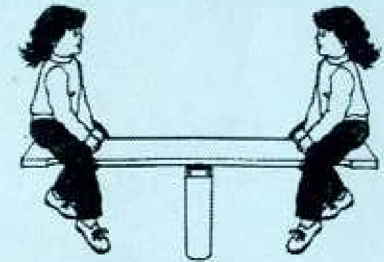
सुगम गणित

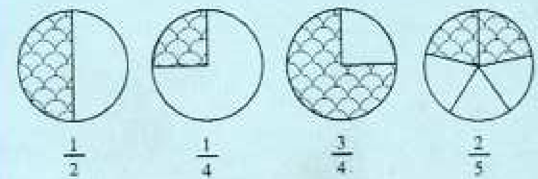
(गणिताच्या सोप्या वाटा)

5 वी ते 7 वी साठी

सौ. मंगला नारळीकर



$12^3 + 1^3 = 1729 = 10^3 + 9^3$



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$

60 = 2 X 2 X <u>3</u> X <u>5</u>

105 = <u>3</u> X <u>5</u> X 7

120 = 2 X 2 X <u>3</u> X <u>5</u> X 2

भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे

वरच्या वर्गातील गणिताचा पाया पाचवी ते सातवीच्या वर्गातच घातला जातो. ल.सा.वि., म.सा.वि., गुणोत्तर प्रमाण, शेकडेवारी, अपूर्णांकांचे प्रकार, समीकरण मांडणे व सोडवणे हे सर्व अंकगणित व बीजगणिताचे सुरवातीचे व महत्त्वाचे भाग या वर्गात शिकवले जातात. या पुस्तकात ते सोप्या व सुरस भाषेत समजाऊन दिले आहेत. महत्त्वाच्या गोष्टी लक्षात ठेवण्यासाठी युक्त्या आहेत. विद्यार्थी तसेच त्यांना शिकवणारे पालक व शिक्षक यांनाही हे पुस्तक उपयोगी पडेल. हुषार विद्यार्थ्यांसाठी जादा प्रश्नसंग्रह दिले आहेत. त्यामुळे गणित प्राविण्य व प्रज्ञा यासारख्या परीक्षांनाही हे पुस्तक उपयुक्त आहे.

शालेय शिक्षण अपूर्ण राहिलेल्या प्रौढांनाही या पुस्तकाचा गणित विषय समजावून घेण्यासाठी उपयोग होईल यात शंका नाही.

डॉ. सौ. मंगला नारळीकर यांनी मुंबई विद्यापीठातून गणित विषयात एम्.ए. ही पदवी संपादन केली व टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई येथे संशोधन करून पीएच्.डी. ही पदवी मिळवली. त्यांनी काही काळ पुणे विद्यापीठात पदव्युत्तर वर्गांना अध्यापन केले आहे. तसेच शालेय स्तरापासून पदव्युत्तर स्तरापर्यंत गणितातील विविध विषयांवर ठिकठिकाणी व्याख्याने दिली आहेत. विद्यार्थ्यांना गणित विषय सहज समजेल अशा प्रकारे मांडणी करण्यात त्यांना विशेष रस आहे.

भास्कराचार्य प्रतिष्ठान

(गणित शिक्षण व संशोधन संस्था)

५६/१४, एरंडवणे, दामले पथ,

लॉ कॉलेज रोड, पुणे ४११ ००४

फोन नं. : ३३४९४७

ई-मेल : bhaskara_p@vsnl.com

सुगम गणित

(गणिताच्या सोप्या वाटा)

5 वी ते 7 वी साठी

सौ. मंगला नारळीकर

भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे

प्रकाशन :
विजयादशमी, १९ ऑक्टोबर १९९९

प्रकाशक :
प्रा. चिं.शं. इनामदार
कस्टोडिअन
भास्कराचार्य प्रतिष्ठान
दामले पथ, लॉ कॉलेज रोड,
पुणे ४११ ००४

टाईपसेटींग :
श्री. नरेंद्र अ. कुळकर्णी
११ सदाशिव सह. गृह. संस्था म.,
भेलकेनगर, कोथरूड,
पुणे ४११ ०२९.

मुद्रक :
मुद्रा
३८३ नारायण पेठ,
पुणे ४११ ०३०.

किंमत : ६० रुपये.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांसाठी

हे पुस्तक पाठ्यपुस्तक नाही. पण पाठ्यपुस्तकाला पूरक जरूर आहे. पाठ्यपुस्तकावरून किंवा शाळेत शिकून गणिताचे काही भाग नीट समजत नसतील, उदाहरणे सोडवता येत नसतील, तर या पुस्तकातला संबंधित भाग नीट वाचून पहा — कदाचित दोन तीनदा वाचल्यावर अधिक चांगलं समजेल. मग नमुन्याची उदाहरणे कशी सोडवली आहेत ते पायरी पायरीने समजावून घ्या, म्हणजे तशा प्रकारची गणिते सोडवता येतील.

केवळ परीक्षेपुरते मार्क मिळवण्यात मदत करणे एवढाच हेतू या पुस्तकाचा नाही. तर गणित विषयाचं नीट आकलन व्हावं, त्याची गोडी लागावी, पुढे कुठल्याही क्षेत्रात अभ्यास किंवा काम करताना आवश्यक ते गणित शिकण्याची तुमची तयारी असावी, त्यासाठी पायाभूत अशी तार्किक विचारसरणी तुम्ही आत्मसात करावी हा या पुस्तकाचा उद्देश आहे. पाचवी ते सातवीच्या इयत्तांना आवश्यक ते अंकगणित व बीजगणित यात आहे. भूमितीसाठी वेगळे पुस्तक लिहिण्याचा विचार आहे.

गणिताचा अभ्यास करताना पूर्व तयारी म्हणून 2 ते 10 चे पाढे तोंडपाठ हवेत. शक्य तर 15 पर्यंतचे पाठ करा. रोज पाढे पाठ म्हणण्यासाठी फक्त दहा मिनिटे दिलीत तरी खूप फायदा होईल. तसंच बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या चारही क्रिया करता आल्या पाहिजेत. त्यांचा सराव असू दे.

एखादा विभाग दोनदा वाचूनही नीट समजला नाही, तर शिक्षक किंवा वरच्या वर्गातील विद्यार्थी किंवा तुमच्या वर्गातीलच हुषार विद्यार्थ्यांकडून समजावून घ्या. पालक देखील मदत करू शकतील. प्रयत्नांनी देखील समजणार नाही असा अवघड भाग शाळेच्या गणितात नाही.

एखादा विभाग नीट समजला, की त्यावरील भरपूर गणिते सोडवा. सराव नसेल, तर गणिताची रीत विसरली जाते. प्रथम सोपी गणिते व नंतर जरा अवघड गणिते, अशी बरीचशी सोडवा. काही दिवसांनी उजळणी करत रहा म्हणजे शिकलेल्या रीती विस्मरणाच्या विहिरीत बुडून जाणार नाहीत.

गणित हा विषय मुळापासून पक्का असेल, तरच चांगले यश मिळते. पहिली ते चौथीचे गणित नीट करून पाचवी ते सातवीचा भाग जर व्यवस्थित, मजबूत केला, तरच नंतर दहावीचं, पुढे बारावीचंही गणित येईल. पायाच कच्चा असेल, तर इमारत चांगली उभी राहील का?

रोज पाढे म्हणणे आणि कमीत कमी पाच गणिते सोडवणे हे नियम पाळा. महत्त्वाचे नियम, जे नेहमी लक्षात ठेवले पाहिजेत, ते पुस्तकात शेवटी दिले आहेत. ते वाचत जा. हुषार मुलांसाठी, सरावाची जरा अवघड अशी भरपूर गणिते पुस्तकाच्या शेवटच्या भागात आहेत. यातील काही गणिते पाचवीच्या व सहावीच्या हुषार विद्यार्थ्यांना सोडवता येतील. सातवीच्या हुषार विद्यार्थ्यांना सगळीच यावीत. या पुस्तकातली गणिते सोडवून झाली की वेगवेगळ्या शाळांची पाठ्यपुस्तके मिळवून त्यातली देखील गणिते सोडवा. कारण भरपूर सराव ही यशाची गुरुकिल्ली आहे. मनापासून प्रयत्न केलात की निश्चित प्रगती कराल, उत्तम गुण मिळवाल.

पालक वर्ग व शिक्षकांसाठी

'गणिताच्या सोप्या वाटा' या माझ्या १९८९ मधील पुस्तकात बरीचशी भर घालून, अनुभवाने लक्षात आल्यावर काही भाग आणखी सोपा करून, सामान्य, तसेच हुषार विद्यार्थ्यांसाठीही सरावाची भरपूर उदाहरणे घालून हे पुस्तक तयार केले आहे. पाचवी ते सातवीचे गणित पायाभूत असून ते कच्चे राहिले तर नंतरचे गणित समजणे फार कठीण. म्हणून या काळातच गणिताचा पाया पक्का केला पाहिजे. त्या विषयाची विद्यार्थ्यांना भीती किंवा नावड निर्माण होऊ नये.

समीकरण मांडून सोडवणे व गुणात्तराचा अपूर्णांक मांडणे या महत्त्वाच्या क्रिया समजल्या, त्यांचा वापर करता आला, की शाळेचे व्यस्त प्रमाण सोडून सगळे गणित करता येते. समप्रमाण, सरळ व्याज, शेकडेवारी, नफा तोटा, कमिशन या सर्व विभागांना ही पद्धत उपयोगी पडते. वेगवेगळ्या विभागांना वेगवेगळी मांडणी शिकवली की विद्यार्थ्यांचा गोंधळ होतो आणि अखेरीला त्यांना धड काहीच येत नाही हा माझा अनुभव आहे. शिवाय समीकरणे मांडून सोडवणे हे बीजगणितामध्ये अत्यंत आवश्यक आहे. मग ते जरा लवकर शिकवून पक्के करावे असे माझे मत आहे. व्यस्त प्रमाणाची गणिते अनेकांवरून एक, एकावरून अनेक या प्रमाणे पायरी पायरीने सोडवता येतात.

शिक्षकांना एक विनंती आहे की विद्यार्थ्यांनी एखादे गणित शिक्षकांनी शिकवलेल्या रीतीपेक्षा वेगळ्या पण बरोबर रीतीने व्यवस्थित सोडवले असेल, तर त्यासाठी त्याचे गुण कमी करू नयेत. साधारण बुद्धीच्या विद्यार्थ्यांना समजण्यास व लक्षात ठेवण्यास सोप्या व कमीत कमी पाठांतर आवश्यक असणाऱ्या अशा रीती शिकवायला हव्यात.

विद्यार्थ्यांना विषय समजण्यास मदत करणारी चित्रे, महत्त्वाच्या गोष्टी लक्षात राहण्यासाठी युक्त्या हे शिक्षकांनी जरूर करावे. या पुस्तकात अशा स्वरूपाचा प्रयत्न केला आहे. उत्साही शिक्षक हा विषय याहूनही सुरस करू शकतात.

पुस्तकाच्या अखेरीला दिलेल्या उदाहरण संग्रहातील बरीचशी उदाहरणे हुषार अभ्यासू मुलांना निश्चितच सोडवता येतील. त्यातील काही उदाहरणे अवघड असून हुषार मुलांच्या बुद्धीला चालना देणारी आहेत.

पुस्तकाची छपाई व प्रकाशन करण्यास भास्कराचार्य प्रतिष्ठानने पुढाकार घेतला त्याबद्दल प्रतिष्ठानची मी आभारी आहे. श्री. नरेंद्र कुळकर्णी यांनी सगळा फॉर्म कॉम्प्युटरवर तयार केला, त्यांचेही आभार मानते. शिवाय तयार झालेली प्रुफे, डॉ. मा.रा. मोडक, श्री. मु.द. गोडसे, दीपाली साठे, सुषमा कुलकर्णी व सुरेखा देसाई या अनुभवी शिक्षकांनी काळजीपूर्वक वाचून उपयुक्त सूचना केल्या. त्यांचे मन:पूर्वक आभार.

— मंगला नारळीकर

अनुक्रमणिका

1.

अक्षराचं गणित किंवा बीजगणित

अक्षराचं गणित जरा वेगळं दिसलं तरी अवघड नसतं. मोठ्या आकड्यांची व क्लिष्ट गणितं सोपी करण्यासाठीच अक्षराचं गणित शोधून काढलेलं आहे. यात आकड्यांबरोबरच 'म', 'न', 'क्ष' अशी मराठी किंवा 'x', 'y', 'a', 'b' यासारखी इंग्लिश अक्षरं वापरली जातात. 12म म्हणजे 12 X म, $न^2$ म्हणजे न X न. आपण 4^2 = 4 X 4, 3^3 = 3 X 3 X 3 असं लिहितो तसंच $म^3$ = म X म X म. अक्षरांची बेरीज आणि वजाबाकी अगदी सोपी असते.

प्रत्येक अक्षर म्हणजे वेगवेगळा प्राणी किंवा फळ आहे असं मानू या. 4म + 3म = 7म म्हणजे चार मांजरं व तीन मांजरं मिळून सात मांजरं होतात. पण 4म + 3क = 4म + 3क, किंवा 4म + 3क = 3क + 4म असंच लिहावं लागतं. कारण 4 मांजरं व 3 कुत्रे मिळून 7 मांजरं किंवा 7 कुत्रे होत नाहीत. सगळे मिळून 3 कुत्रे आणि 4 मांजरं किंवा 4 मांजरं आणि 3 कुत्रे एवढेच असतात. म्हणजेच सजातीय अक्षरांची साधी बेरीज किंवा वजाबाकी करता येते. जसे

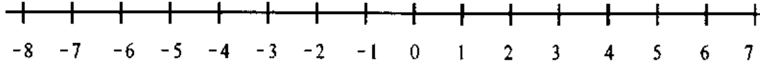
10क्ष + 2क्ष + 9क्ष = 21क्ष

किंवा 15क्ष - 7क्ष = 8क्ष

पण 10अ + 2ब + 4अ = (10अ + 4अ) + 2ब = 14अ + 2ब.

इथे अ आणि ब एका जातीची अक्षरे नाहीत. म्हणून 16अ किंवा 16ब होणार नाही.

आता 4न - 10न कसं करायचं पहा. त्यासाठी 4 - 10 ही वजाबाकी करायला शिकलात ना? अनेक प्रकारांनी ही वजाबाकी लक्षात घेता येते. 4 किंवा +4 म्हणजे 4 सें.मी. शून्यापासून उजवीकडे आणि नंतर 10 सें.मी. डावीकडे (उलट दिशेला) गेलं की एकूण शून्यापासून 6 सें.मी. डावीकडे जाण्याचा परिणाम होतो होय ना?



शून्य म्हणजे सुरुवातीचा बिंदू मानायचा. न म्हणजे आपला एकक, इथे सेंटिमीटर आहे. म्हणजेच 4न - 10न = -6न अशी वजाबाकी येते.

दुसऱ्या प्रकाराने अधिक व उणे संख्यांचा विचार पैशांच्या हिशोबाप्रमाणे आहे. 4 - 10 ही वजाबाकी करताना 4 रुपये खिशात होते. 10 रुपयांचा खर्च केला म्हणजे 6 रुपये दुकानदाराचे कर्ज राहिले. कर्ज हे वजा चिन्हाने लिहायचे, तसेच खर्च ही वजाच करायचा. म्हणून 4 - 10 = -6.

आणि 4न - 10न = -6न

आणखी एका प्रकाराने नीट समजूत करता येते.

-6न = (-4न) + (-2न)

4न - 6न = 4न + (-4न) + (-2न)

आता 4न आणि -4न मिळून शून्य येते. म्हणून

4न - 6न = -2न.

प्रत्यक्ष गणिते करताना असं लक्षात ठेवा की **एक अधिक आणि एक वजा संख्या असेल तर त्यांची बेरीज करताना मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करा व आलेल्या वजाबाकीला मोठ्या संख्येचे चिन्ह लावा.**

दोन अधिक चिन्हांच्या संख्यांची बेरीज साध्या संख्यांची बेरीज असते.

दोन वजा संख्यांची बेरीज करताना चिन्हे वगळून संख्यांची बेरीज करून बेरजेला वजा चिन्ह लावा.

अक्षरांची पदं असलेल्या संख्यांची बेरीज-वजाबाकी करताना लक्षात ठेवा की दोन सजातीय पदांचीच बेरीज किंवा वजाबाकी करता येते. 6अ - 2अ = 4अ पण 6अ - 2ब = 6अ - 2ब. कारण अ च्या पदातून ब चे पद वजा करता येत नाही.

विविध अक्षरे व संख्या यांची पदावली बनते. उदाहरणार्थ, (15म - 4न + 10क्ष), (3अ^2 + 7अब - 15), (25क्ष - 16) या पदावल्या, म्हणजे वेगवेगळ्या पदांचे समूह किंवा ओळी आहेत. यांच्या बेरजा, वजाबाक्या कशा करायच्या ते पाहू.

पदावल्यांची बेरीज

उदा. 1 : (15म - 4न + 10क्ष) व (4म - 2न) या पदावल्यांची बेरीज करा. दोन्ही पदावल्या एका खाली एक लिहिताना सजातीय पदे एका खाली एक लिहू.

```
   15म - 4न + 10क्ष
+
   4म - 2न
   ----------------
   19म - 6न + 10क्ष
```
अशी बेरीज झाली.

उदा. 2 : (11अ + 4ब - 17) आणि (8ब - 3अ) यांची बेरीज करा.

पुन्हा सजातीय पदे एका खाली एक लिहू.

```
   11अ +  4ब - 17
+
   -3अ +  8ब
   --------------
   8अ + 12ब - 17
```
ही बेरीज झाली.

पदावल्यांची वजाबाकी

एखादी संख्या वजा करणे म्हणजेच विरुद्ध चिन्हांची तेवढीच संख्या मिळवणे होय. जसे 12 ही संख्या वजा करणे म्हणजे -12 ही संख्या मिळवणे. किंवा 12 रुपये खर्च करणे म्हणजेच 12 रुपये कर्ज होण्यासारखे आहे. (-12) रुपये वजा करणे म्हणजे 12 रुपये कर्ज वजा करणे म्हणजे 12 रुपये मिळवणे हे समजावून घ्या. म्हणजेच -(-12) = +12. म्हणून नियम असा लक्षात ठेवा की,

एखादं पद वजा करणं म्हणजे त्याचं चिन्ह बदलून बेरीज करणं होय. तसंच एखादी पदावली वजा करणं म्हणजे पदावलीतील प्रत्येक पद वजा करायचं किंवा प्रत्येक पदाचं चिन्हं बदलून बेरीज करायची.

उदा. 3 : 5न - 2न = 5न + (-2न) = 3न.

6म - (-3म) = 6म + 3म = 9म.

उदा. 4 : (4म + 6न - क्ष) - (2म - न + 2क्ष) म्हणजेच

(4म + 6न - क्ष)
-(2म - न + 2क्ष) = 4म + 6न - क्ष
+(-2म + न - 2क्ष)
―――――――――
2म + 7न - 3क्ष.

∴ (4म + 6न - क्ष) - (2म - न + 2क्ष) = 2म + 7न - 3क्ष.

उदा. 5 : (6म + 7न - 11र) - (10म - 2न - 15र)

= [6म + 7न - 11र
+(-10म + 2न + 15र)
―――――――――
-4म + 9न + 4र.] = -4म + 9न + 4र.

सरावासाठी गणिते (1) :

1) (8अ + 4ब - क) + (2अ - 6ब + 3क)
2) (2म + 3न + 4क्ष) + (म - 7न + क्ष)
3) (7क + 5ख - 2ग) + (-3क + ख - 2ग)
4) (5अ + 10ब - 25क) - (2अ - 4ब + 10क)
5) (8क + ख + 4ग) - (-क + 2ख + 3ग)
6) (4म - न + 13) - (2म - न - 1)

7) (17म - 11न + 9) - (12म - 20न)
8) (-31स + 8न - 5ग) + (25स - 17न + 11ग)
9) (-20अ - 9ब + 7क) - (-31अ + ब - 3क)
10) (क + 3म - 9ल) + (-5क + म + 10ल).

अक्षरांचं गणित शाब्दिक माहिती थोडक्यात लिहिण्यासाठी फार उपयोगी पडतं. एका संख्येला 4 ने गुणून तिच्यात 13 मिळवले हे बीजगणितात लिहिताना संख्येला एक अक्षर, जसे म मानू. मग वरील क्रिया 4म + 13 अशी थोडक्यात आणि चटकन ध्यानात येईल अशी लिहिता येते. आणखी तशीच उदाहरणे पहा.

उदा. 6 : एका संख्येला 7 ने गुणून तिच्यातून 9 वजा करणे.

संख्या अ मानू. (7अ - 9) ही नवी संख्या आली.

सरावासाठी खालील क्रिया बीजगणितात लिहा.

(1)a 1) एका संख्येला 7 ने गुणा.
2) एका संख्येला 22 ने गुणून त्यातून 17 वजा करा.
3) एका संख्येची सहापट करून नंतर 15 मिळवा.
4) एक संख्या निम्मी करून तिच्यात 8 मिळवा.

अक्षरांच्या किंमती वरून पदावलीची किंमत

आता अक्षर वापरून केलेल्या पदावलीची किंमत, अक्षराच्या किंमती वरून काढणं किती सोपं आहे पहा. 6क + 5 या पदावली मध्ये, क = 3 असेल तर पदावलीची किंमत काढू.

क = 3 म्हणून 6क = 6 X 3 = 18

∴ 6क + 5 = 18 + 5 = 23.

आता प = -3 असेल, तर 4प + 2 ची किंमत काढू. प = -3,

∴ 4प = 4 X (-3) = (-12)

∴ 4प + 2 = -12 + 2 = -10.

सरावासाठी खालील पदावल्यांच्या किंमती शोधा (2) :

1) स = 4, तर 5स - 7 ची किंमत.

2) क = -2, तर 15क + 6 ची किंमत.

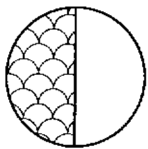
3) म = 7, तर 82 - 6म ची किंमत.

4) ड = -1, तर $ड^2$ + 3 ची किंमत.

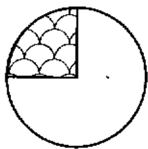
5) ब = 10, तर 16ब - 27 ची किंमत.

अपूर्णांक

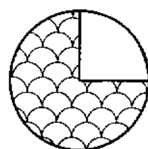
काही अपूर्णांकांची तुम्हाला माहिती आहे. $\frac{1}{2}$ भाकरी म्हणजे अर्धी भाकरी किंवा भाकरीचे दोन सारखे भाग केले तर त्यातला एक भाग.



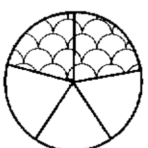
$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{4}$



$\frac{3}{4}$



$\frac{2}{5}$

तसंच $\frac{3}{4}$ भाकरी म्हणजे एका भाकरीचे चार सारखे भाग करून त्यातले तीन घ्यायचे. तसंच $\frac{2}{5}$ भाकरी म्हणजे एका भाकरीचे पाच सारखे भाग करून त्यातले 2 घ्यायचे.

आता $\frac{1}{3}$ म्हणजे काय बरं? एका पूर्ण वस्तूचे तीन सारखे भाग करून त्यापैकी एक भाग घेतला, की त्या वस्तूचा $\frac{1}{3}$ झाला. नुसतं $\frac{1}{3}$ लिहिलं तर एक या संख्येचा $\frac{1}{3}$ भाग होतो.

एक गोष्ट लक्षात ठेवा :

अपूर्णांकाचा छेद किंवा खालच्या भागातली संख्या ही भागाकार करण्यासाठी, सारखे भाग करण्यासाठी वापरायची, तर अंश म्हणजे वरच्या भागातली संख्या त्या प्रत्येक भागाला गुणण्यासाठी वापरायची. जसे $\frac{5}{9}$ म्हणजे एक या संख्येचे नऊ सारखे भाग करून त्यातल्या एका भागाला पाच ने गुणायचे, किंवा तसले पाच भाग घ्यायचे. आता $\frac{5}{4}$ हा अपूर्णांक पहा. इथे अंश आहे 5 आणि तो छेदापेक्षा म्हणजे 4 पेक्षा मोठा आहे. म्हणजे एकाचे चार सारखे भाग करून तसले पाच घेतले की एक या पूर्ण संख्येपेक्षा मोठी संख्या मिळते. एक ही पूर्ण संख्या घेऊन तिच्यात $\frac{1}{4}$ मिळवला की देखील $\frac{1}{4}$ एवढे पाच भाग होतात. म्हणजे $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$. ही गोष्ट भागाकारानेही मिळते. 5 ला 4 ने भागले की 1 मिळतो आणि बाकी उरते 1. त्या बाकीला पुन्हा 4 ने भागले की भागाकार येतो $\frac{1}{4}$ म्हणजेच $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$. अंश छेदापेक्षा मोठा असेल तर तो अपूर्णांक 1 पेक्षा मोठा असतो, अंश छेदापेक्षा लहान असेल तर तो अपूर्णांक 1 पेक्षा लहान असतो.

एरवी दोन अपूर्णांकांची तुलना कशी करायची हे माहित आहे का? जर काही पूर्णांक दिले असले, जसे 70, 58, 16, 29, 63, तर त्या पैकी कुठला सर्वात मोठा, कुठला लहान हे तुम्हाला समजते. पण अपूर्णांकांपैकी लहान मोठा समजण्यासाठी थोडा प्रयत्न करायला हवा. कारण अपूर्णांक हे वेगवेगळ्या उंचीच्या ठोकळ्यांवर उभ्या असणाऱ्या माणसांप्रमाणे असतात.





अ ब

वरील आकृतीत कुठला मुलगा अधिक उंच आहे हे ठरवणे कठीण आहे. कारण अ हा मुलगा लहान ठोकळ्यावर उभा आहे. आता ते सारख्या उंचीच्या ठोकळ्यांवर उभे राहिले तर खालील आकृतीत पहा.





अ ब

आता अ हा मुलगा जास्त उंच आहे हे सहज दिसून येते. अपूर्णांकांचं असंच आहे. त्यांचा छेद समान असेल, म्हणजेच पायाखालचा ठोकळा सारख्या उंचीचा असेल, तर कुठला लहान, कुठला मोठा हे ओळखता येते.

आता दोन अपूर्णांकांचा छेद सारखा कसा करायचा? त्यासाठी लक्षात ठेवा :

कुठल्याही अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच संख्येने गुणलं तर अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही.

जसे $\frac{2}{3} = \frac{2 X 2}{3 X 2} = \frac{4}{6}$.

मग हा नियम वापरून **कुठल्याही दोन अपूर्णांकाचे छेद समान करता येतात.** $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{4}{7}$ हे अपूर्णांक पहा. दोघांचा छेद दोन्ही छेदांच्या गुणाकाराएवढा म्हणजेच 7 X 3 = 21 करता येईल :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 X 7}{3 X 7} = \frac{14}{21} \text{ तर } \frac{4}{7} = \frac{4 X 3}{7 X 3} = \frac{12}{21}.$$

आता 21 सारखे भाग केले, तर त्यातले 12 भाग जास्त की 14 भाग जास्त हे उघड आहे नाही का?

म्हणून $\frac{2}{3} = \frac{14}{21} > \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ हे दोन्ही 21 या छेदावर किंवा ठोकळ्यावर उभे राहिले म्हणून कुठला मोठा, कुठला लहान ते समजलं.

पूर्णांक व अपूर्णांक यांची तुलना करताना पूर्णांकाचा छेद 1 इतका असतो हे लक्षात ठेवा. म्हणजे $6 = \frac{6}{1}$, $7 = \frac{7}{1}$.

तसंच $1 = \frac{1}{1} = \frac{1001}{1001} = \frac{251}{251}$ हेही लक्षात असूं दे. कारण एकाचे 251 भाग करून 251 सगळे घेतले की 1 पूर्ण घेतला. पुन्हा एकदा $\frac{7}{6}$ सारखा अंश छेदापेक्षा मोठा असणारा अपूर्णांक 1 पेक्षा मोठा, तर $\frac{11}{14}$ सारखा अंश छेदापेक्षा लहान असणारा अपूर्णांक 1 पेक्षा लहान आहे हे दिसून येतं.

कारण $\frac{7}{6} > 1 = \frac{6}{6}$, $\frac{11}{14} < 1 = \frac{14}{14}$.

आपण इथे >, < ही चिन्हं वापरत आहोत. ही वापरताना मनात घोटाळा होत असेल, तर लक्षात ठेवा की > किंवा < हा कोन आहे. मोठा आकडा दादागिरी करून कोनाच्या आत आरामात बसतो, तर बिचाऱ्या लहान आकड्याला टोक टोचत असतं.

मांजराचे छोटे पिल्लू $<$ मोठे मांजर

अपूर्णांकांची बेरीज, वजाबाकी, छोटे व सोपे (संक्षिप्त) रूप

अपूर्णांकांची बेरीज वजाबाकी करताना देखील, त्या अपूर्णांकांचे छेद समान करून घ्यायचे असतात.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ही बेरीज करताना, दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद समान म्हणजे 6 करता येईल.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$ हे उत्तर येते.

अर्थ असा समजावून घेऊ. अर्धी भाकरी म्हणजेच दोन समान भाग घेतल्यावर घेतलेला एक भाग किंवा सहा समान भाग केल्यावर घेतलेले तीन भाग. तसंच $\frac{1}{3}$ भाकरी म्हणजे सहा समान भाग केल्यावर घेतलेले दोन भाग. आता **तुलनेसाठी दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद 6 केले.** म्हणून दोन्ही अपूर्णांक मिळून, सहा समान भाग केल्यावर घेतलेले 5 भाग होतात.

तसंच $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ हे गणित पहा. इथे दोन्ही अपूर्णांकांना 4 किंवा 8 हा छेद देता येईल. यापैकी दोन्ही वापरून पाहू.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

$$\therefore \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

तसंच $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$$\therefore \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

दोन्ही प्रकारांनी उत्तर $\frac{1}{4}$ आले. समान छेद घेताना दोन्ही छेदांचा गुणाकार घेतला तर चालतो. पण त्याऐवजी थोडा लहान छेद घेता आला, तर गणित सोपे होते. दोन्ही छेदांनी भाग जाईल अशी संख्या मात्र हवी.

सरावासाठी गणिते (३) :

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	6) $\frac{6}{7} - \frac{5}{6}$
2) $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$	7) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$
3) $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$	8) $\frac{7}{8} - \frac{1}{2}$
4) $\frac{5}{7} - \frac{1}{3}$	9) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$
5) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$	10) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

कधी कधी अपूर्णांकाला सोपे रूप देण्यासाठी अंश व छेद दोघांनाही एकाच संख्येने भागता येते. असे केले, तरी अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही. जसे

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ (अंश व छेद यांना 3 ने भागून)

$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ (अंश व छेद यांना 5 ने भागून)

सरावासाठी गणिते (3a) :

गाळलेल्या जागा भरा.

1) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{8}$

2) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{15}$

3) $\frac{2}{3} = \frac{8}{\square}$

4) $\frac{9}{15} = \frac{\square}{5}$

5) $\frac{72}{84} = \frac{12}{\square}$

6) $\frac{24}{30} = \frac{\square}{5}$

7) $\frac{48}{36} = \frac{4}{\square}$

8) $\frac{42}{49} = \frac{\square}{7}$

9) $\frac{15}{50} = \frac{3}{\square}$

10) $\frac{45}{72} = \frac{5}{\square}$

कधी कधी अपूर्णांकाचा अंश व छेद स्पष्ट संख्येत दिलेला नसतो. उदाहरणार्थ, $\frac{12 \times 7}{14 \times 5}$ हा अपूर्णांक पहा.

येथे अंश 12 X 7 = 84, छेद 14 X 5 = 70 आहे पण असे गुणाकार करण्याआधी, अंश व छेद यांच्यामध्ये समान गुणक (कॉमन फॅक्टर) असेल, तर त्याने अंश व छेद यांना भागून अपूर्णांक सोपा, छोटा करता येतो. इथे अंश व छेद, दोघांनाही 7 ने व 2 ने भागता येते. कारण,

12 X 7 = 2 X 2 X 3 X 7,

14 X 5 = 2 X 5 X 7.

आता 7 ने व 2 ने प्रत्येकाला भागले की,

$$\frac{12 \times 7}{14 \times 5} = \frac{\not{2} \times 2 \times 3 \times \not{7}}{\not{2} \times 5 \times \not{7}} = \frac{6}{5}$$ असे छोटे रूप मिळते.

लक्षात ठेवा, की अंशातील एक अवयव काढून टाकताना तोच अवयव छेदातून देखील काढून टाकायचा. म्हणजे अंश व छेद, दोन्ही मधले सामायिक अवयव किंवा कॉमन फॅक्टर शोधून त्यांनी अंश व छेद यांना भागायचे किंवा ते अवयव

काढून टाकायचे. या पद्धतीला आपण 'काटाकाटीचे' गणित असे म्हणू शकतो. हे नीट शिकून घ्या कारण याच्या मदतीने मोठे मोठे गुणाकार व भागाकार टाळून गणित सोपे करता येते. वरील गणितात अपूर्णांक $\frac{84}{70}$ असा आहे पण तोच $\frac{6}{5}$ असा लिहिता येतो.

उदा. 1 : $\frac{15 \times 2 \times 7}{14 \times 3} = \frac{210}{42}$ आपण याला सोपे रूप देऊ.

$$\frac{15 \times \overset{1}{\not{2}} \times 7}{{}_{7}\not{14} \times 3} = \frac{15 \times \not{7}}{\not{7} \times 3} = \frac{\not{15}^{5}}{\not{3}_{1}} = 5$$ असे उत्तर मिळते.

इथे अंश व छेद यांना प्रथम 2 ने, मग 7 ने व नंतर 3 ने भागले. हे सोपे भागाकार आहेत. 42 ने 210 ला भागले तरी तेच उत्तर येते. पण आधी 15 X 2 X 7 व 14 X 3 हे गुणाकार करून मग 42 या मोठ्या आकड्याने भागण्यात वेळ जास्त जातो.

उदा. 2 : $\frac{100 \times 3 \times 4}{25 \times 6}$ इथे आधी 25 ने अंश व छेद यांना भागता येईल. नंतर 3 ने व 2 ने भागू या.

$$\therefore \frac{\overset{4}{\not{100}} \times 3 \times 4}{{}_{1}\not{25} \times 6} = \frac{4 \times \overset{1}{\not{3}} \times 4}{2\not{6}} = \frac{4 \times \overset{2}{\not{4}}}{1\not{2}} = 8$$ असे उत्तर येते.

एक गोष्ट लक्षात ठेवा की अंश व छेद यातील अवयव वेगवेगळे ठेवण्यात फायदा असतो, कारण मग कॉमन फॅक्टर शोधणे सोपे जाते. कॉमन फॅक्टर संपले की मगच अंशातील व छेदातील संख्या काढाव्यात. आधीच अंशाच्या व छेदाच्या संख्या काढल्या तर त्या अनेक वेळा फार मोठ्या येतात. **अवयवांची** काटाकाटी करताना **अंश व छेद, दोघातूनही समान अवयव काटायचे असतात**, हे मात्र विसरू नका.

सरावासाठी गणिते (4) :

छोटे, सोपे रूप द्या.

1) $\frac{14 X 10}{35 X 8}$

2) $\frac{72}{60}$

3) $\frac{45 X 5}{25 X 3}$

4) $\frac{15 X 4 X 11}{22 X 6}$

5) $\frac{90 X 26}{39 X 5}$

6) $\frac{27 X 21}{14 X 3}$

7) $\frac{42 X 9}{18 X 21}$

8) $\frac{60 X 22}{33 X 20}$

9) $\frac{75 X 36}{10 X 27}$

10) $\frac{62 X 20}{31 X 8}$

2.

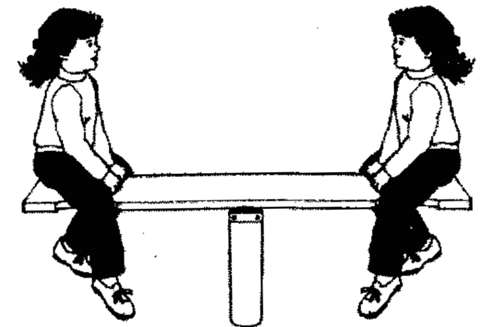
समीकरण

गणिते सोडवण्यासाठी अक्षरांची मदत घेण्याप्रमाणेच समीकरणे मांडायला व सोडवायला शिकणे फायद्याचे असते. समीकरण म्हणजे काय? तर दोन पदांची किंमत सारखीच आहे हे दाखवणं. छोटी छोटी समीकरणं तर आपल्याला माहीतच आहेत. 4 X 3 = 12 हे साधं, सोपं समीकरण झालं. म्हणजेच, 4 X 3 ची किंमत 12 एवढी आहे हे त्यातून समजतं. 4 X 3 ही या समीकरणाची डावी बाजू, 12 ही उजवी बाजू आणि मधलं = हे चिन्ह बरोबरी दाखवतं. डावी बाजू आणि उजवी बाजू समान असतील तर

डावी बाजू = उजवी बाजू

हे समीकरण बरोबर, किंवा सत्य आहे. पण दोन्ही बाजू समान नसतील तर हेच समीकरण चूक आहे व ते वापरल्यास गणित चुकणार. समीकरण हे दोन्ही बाजूंना सारखेच वजन ठेवलेल्या, व्यवस्थित तोलून आडव्या स्थितीत राहिलेल्या सी सॉ सारखे असते.

अशी कल्पना करा की सी सॉ च्या दोन्ही बाजूंना दोन सारख्या वजनाच्या जुळ्या बहिणी बसल्या आहेत. समीकरण सोडवताना, दोन्ही बाजूंवर सारख्याच



क्रिया कराव्या लागतात. सी सॉ वरच्या एका बहिणीला काही दिलं, तर दुसऱ्या बहिणीला तेवढंच द्यावं लागतं, नाहीतर भांडण होऊन सी सॉ वाकडा होतो, गोंधळ होतो. म्हणून लक्षात ठेवा की, **समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर सारखीच क्रिया केली, तरच समीकरण बरोबर रहातं.**

आता हे समीकरण पहा.

$4^2 - 6 = 5 X 2.$

डाव्या बाजूची किंमत 16 - 6 = 10 आणि उजव्या बाजूचीही तेवढीच आहे. म्हणून हे समीकरण बरोबर आहे. दोन्ही बाजूंमध्ये जर 5 मिळवले,

$4^2 - 6 + 5 = 5 X 2 + 5$

हे नवे समीकरण बरोबर आहे. पण

$4^2 - 6 + 5 = 5 X 2 + 4$ हे समीकरण चूक आहे.

दोन्ही बाजूंवर सारख्याच क्रिया करून छोटी छोटी, अक्षरांची समीकरणे सोडवून, अक्षरांच्या किंमती काढायला शिका.

उदा. 1 : 4म = 16 तर म ची किंमत काय?

आता 4म = 16 दिले आहेत. म ची किंमत हवी आहे. 4म ला 4 ने भागले की म मिळेल. म्हणून दोन्ही बाजूंना 4 ने भागू या.

$\therefore \frac{4म}{4} = \frac{16}{4}$

∴ म = 4 हे उत्तर मिळाले.

उदा. 2 : क - 3 = 7, तर क ची किंमत काय?

दोन्ही बाजूंमध्ये 3 मिळवले, की डावीकडे क उरेल.

∴ क - 3 + 3 = 7 + 3

∴ क + 0 = 10

किंवा क = 10 हे उत्तर मिळाले.

उदा. 3 : 5ब - 4 = 16.

आता सामान्यपणे असा नियम आहे की ज्या अक्षराची किंमत हवी आहे त्याची पदे डावीकडे ठेवून इतर अंक उजव्या बाजूला असावेत. डावीकडचा -4 हा अंक, त्यात 4 मिळवला की जाईल, व डावीकडे साधा अंक उरणार नाही. पण समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर सारखीच क्रिया करायला हवी. म्हणून दोन्ही बाजूंमध्ये 4 मिळवू.

∴ 5ब - 4 + 4 = 16 + 4

∴ 5ब + 0 = 20 किंवा 5ब = 20.

आता दोन्ही बाजूंना 5 ने भागले की मिळते,

ब = 4.

वरील तीनही उदाहरणांत आपण काढलेली अक्षराची किंमत बरोबर आहे का नाही हे तपासता येते.

उदा. 1 मध्ये म = 4 ही किंमत घेऊन समीकरणाची

डावी बाजू = 4म = 16 = उजवी बाजू आहे.

म्हणून आपले उत्तर, म = 4 हे बरोबर आहे.

उदा. 2 मध्ये क = 10 ही किंमत घेऊन समीकरणाची

डावी बाजू = क - 3 = 7 = उजवी बाजू.

∴ क = 10 हे उत्तर बरोबर आहे.

उदा. 3 मध्ये ब = 4 ही किंमत घेऊन समीकरणाची

डावी बाजू = 5ब - 4 = 20 - 4 = 16 = उजवी बाजू.

∴ ब = 4 हे उत्तर बरोबर आहे.

वरील तीनही उदाहरणांची उत्तरे आपण पडताळून पाहिली. समीकरण सोडवून अक्षराची किंमत काढल्यावर तुम्हीही **समीकरणाच्या डाव्या व उजव्या बाजूत,**

त्या अक्षराची किंमत घालून दोन्ही बाजू समान आहेत ना हे तपासून पहा. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया करताना, कधी कधी एखादे पद एका बाजूचे काढून दुसऱ्या बाजूला नेले जाते. वरील उदा. 2 मध्ये,

क - 3 = 7 ∴ क - 3 + 3 = 7 + 3

∴ क = 7 + 3 असे मिळाले.

हीच क्रिया वेगळ्या, सोप्या पद्धतीने लक्षात ठेवता येते. 3 हा अंक डाव्या बाजूला होता, तिथून काढून तो उजव्या बाजूला लिहिला मात्र डाव्या बाजूला -3 होता त्याऐवजी उजव्या बाजूला +3 आला. उदा. 3 मध्ये देखील,

5ब - 4 = 16 नंतर 5ब - 4 + 4 = 16 + 4

∴ 5ब = 16 + 4 असे समीकरण मिळाले.

-4 हे डाव्या बाजूचे पद जाऊन उजव्या बाजूला +4 हे पद आले. आता पुढील उदाहरण पहा.

उदा. 4 : $4x = 2x + 6$.

आता दोन्ही बाजूंमधून 2x वजा करू, कारण x ची सगळी पदे डाव्या बाजूलाच न्यायची आहेत.

∴ $4x - 2x = 2x + 6 - 2x$

∴ $4x - 2x = 2x - 2x + 6$

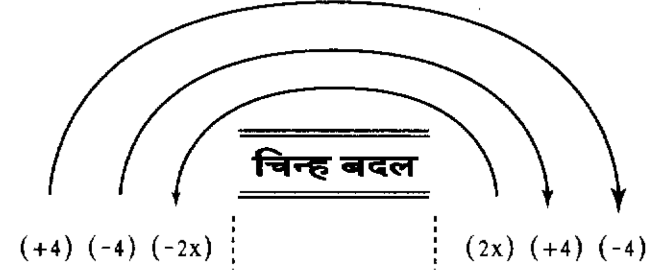
∴ $2x = 6$ व $x = 3$.

यातही 2x हे पद उजव्या बाजूतून काढून टाकले व त्याऐवजी -2x हे पद डाव्या बाजूला आले.

वरील उदाहरणांमधून खालील नियम दिसून येतो तो लक्षात ठेवा.

समीकरण सोडवताना एखादे पद एका बाजूतून काढून दुसऱ्या बाजूला चिन्ह बदलून नेता येते.

समीकरणाचे = हे चिन्ह म्हणजे दोन्ही बाजूंच्यामध्ये एक पूल आहे असे मानता येईल. एखादे पद एका बाजूतून काढून दुसऱ्या बाजूला नेताना हा पूल ओलांडावा लागतो व त्यावेळी पदाचे चिन्ह बदलते.



आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे = हे चिन्ह म्हणजे **चिन्ह बदल** नावाचा पूल आहे.

वरील नियम पाळून सोडवलेले आणखी एक गणित पहा.

उदा. 5 : 6अ - 13 = 15 + 4अ.

आता 4अ डाव्या बाजूला व -13 उजव्या बाजूला नेऊ. बाजू बदलताना चिन्ह बदलायचे.

∴ 6अ - 4अ = 15 + 13

∴ 2अ = 28

∴ अ = 14. ही किंमत घालून समीकरण तपासू.

डावी बाजू = 6अ - 13 = 84 - 13 = 71

उजवी बाजू = 15 + 4अ = 15 + 56 = 71.

दोन्ही बाजू समान होतात म्हणून अ = 14 हे उत्तर बरोबर आहे. सरावासाठी खालील समीकरणे सोडवून अक्षरांच्या किंमती काढा व त्या किंमती घेऊन समीकरण बरोबर येते ना तपासा.

सरावासाठी गणिते (5) :

1) 6क = 42
2) 14अ = 112
3) प - 8 = -2
4) 2म - 3 = 7
5) 7क = 4क + 27
6) 14अ - 7 = 16 - 9अ
7) 5म + 23 = 9म - 17
8) 8क - 13 = 3क + 6
9) 16 - 3क्ष = 4क्ष + 58
10) 7ब + 12 = 3ब + 80
11) 13म - 15 = 19म + 33
12) 23 - 4अ = 10 + 9अ
13) 20ग - 15 = 6 + 17ग
14) 43 - 8स = 13 - 18स.

3.

गुणोत्तर प्रमाण (Ratio-Proportion)

हा भाग अत्यंत महत्त्वाचा आहे. अनेक प्रकारची गणिते या पद्धतीने सोडवता येतात. तेव्हा ही पद्धत नीट शिकून घ्या. सोपी आहे परंतु नीट समजण्यासाठी व लक्षात राहण्यासाठी, या पद्धतीने भरपूर गणिते सोडवून सराव करा. शेकडेवारी, नफा-तोटा, सरळ व्याज, या सगळ्या भागातली गणिते गुणोत्तराचा वापर करून करता येतात.

सगळ्या मुलांना सारख्याच संख्येने पेढे वाटायचे असतील, तर जेवढ्या प्रमाणात मुले वाढतील, तेवढ्याच प्रमाणात पेढे जास्त लागतील. समजा प्रत्येकाला दोन पेढे द्यायचे आहेत; तर आठ मुलांना आठ दुणे सोळा पेढे लागतील, नऊ मुलं असतील, तर नऊ दुणे अठरा पेढे हवेत. 32 मुलांना 32 X 2 = 64 पेढे लागतील. म्हणजे ज्या प्रमाणात मुले वाढतील, त्याच प्रमाणात पेढे वाढणार किंवा मुले व पेढे सम प्रमाणात आहेत असे म्हणतात. इथे पेढ्यांची संख्या व मुलांची संख्या यांचा भागाकार किंवा यांचे गुणोत्तर $\frac{\text{पेढे}}{\text{मुले}} = \frac{2}{1} = 2:1$ आहे असे म्हणतात. **गुणोत्तर प्रमाण म्हणजे त्यांचा भागाकारच**. वरील माहिती

$$\frac{\text{मुले}}{\text{पेढे}} = \frac{1}{2} = 1:2$$ अशीही लिहिता येते.

वरील गणितात मुले व पेढे यांचे गुणोत्तर प्रमाण किंवा थोडक्यात गुणोत्तर 1:2 (एकास दोन) असे ठरलेले आहे.

आता पेढे जेवढे वाटले, ती संख्या दिली तर किती मुलांना वाटले ते समजते व मुलांची संख्या दिली, तर किती पेढे वाटले ते काढता येते. कारण दोन्ही संख्यांचा भागाकार हा कायम आहे. तो अपूर्णांकाच्या रूपात आहे आणि अंश व छेद या दोघांनाही एकाच संख्येने गुणलं, तर अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही, या तत्त्वाचा

आपण उपयोग करणार आहोत.

गुणोत्तर प्रमाणाची गणितं सोपी असतात. एकदा गुणोत्तर व ज्या दोन संख्यांचे गुणोत्तर आहे, त्यातली एक संख्या माहीत झाली की समीकरण मांडून दुसरी संख्या चटकन काढता येते. काही उदाहरणे पाहू या.

उदा. 1 : एका शाळेतील मुली व मुलगे यांचे गुणोत्तर प्रमाण 4:5 असे आहे. मुलींची संख्या 76 असली तर मुलगे किती आहेत?

$\frac{\text{मुली}}{\text{मुलगे}} = \frac{4}{5}$. हे दिलेले आहे.

क्ष मुलगे आहेत असे मानू.

$\therefore \frac{76}{\text{क्ष}} = \frac{4}{5}$

आता दोन्ही बाजूंना 5 X क्ष ने गुणू या.

$\therefore \frac{5 \text{ X } \cancel{\text{क्ष}} \text{ X } 76}{\cancel{\text{क्ष}}} = \frac{4 \text{ X क्ष X } \cancel{5}}{\cancel{5}}$

$\therefore$ 4क्ष = 5 X 76

$\therefore \text{क्ष} = \frac{5 \text{ X } \overset{19}{\cancel{76}}}{1\cancel{4}} = 95.$

शेवटच्या ओळीत आपण काय केले हे पाहिले का?

या अपूर्णांकाचा अंश व छेद दोन्हींना 4 ने भागले. हाच अपूर्णांक $\frac{5 \text{ X } 19 \text{ X } 4}{4}$ $= \frac{5 \text{ X } 19}{1} = 95$ असा आहे.

$\therefore$ क्ष = 95 मुलगे हे उत्तर मिळाले.

$\frac{76}{\text{क्ष}} = \frac{4}{5}$ ह्या समीकरणात तिरका गुणाकार केला, तरी

76 X 5 = 4 X क्ष

$\therefore$ 4क्ष = 76 X 5, क्ष = $\frac{76 \text{ X } 5}{4}$ असेच मिळते.

तिरका गुणाकार करण्याची पद्धत म्हणजे

$$\frac{(A)}{(B)} = \frac{(C)}{(D)}$$

असे समीकरण असेल, तर (A) X (D) = (B) X (C) हे समीकरण मिळते. हेच समीकरण, मूळ समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना (B) X (D) ने गुणले, तर मिळते.

उदा. 2 : एका ऑफिसमध्ये टेबल व खुर्च्या यांचे प्रमाण $\frac{2}{5}$ असे आहे. खुर्च्या 260 आहेत तर टेबले किती आहेत?

इथे टेबलांची संख्या ट आहे असे मानू. मग टेबलांची संख्या व खुर्च्यांची संख्या यांचं गुणोत्तर $\frac{\text{ट}}{260}$ असंही मिळतं.

$\therefore \frac{\text{ट}}{260} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ 5 X ट = 260 X 2 (तिरका गुणाकार).

$\therefore \text{ट} = \frac{\overset{52}{\cancel{260}} \text{ X } 2}{\cancel{5}_1} = 104$ = टेबलांची संख्या.

इथे पुन्हा $\frac{260 \text{ X } 2}{5}$ हा अपूर्णांक पहा.

अंश = 5 X 52 X 2, छेद = 5 $\therefore$ अंश व छेद दोघांना 5 ने भागले.

उदा. 3 : आठ मुलांना 24 चॉकोलेटं वाटली. त्याच प्रमाणात चॉकोलेटं द्यायची असतील, तर 15 मुलांना किती चॉकोलेटं लागतील?

इथे मुलं आणि चॉकोलेटं सारख्याच प्रमाणात वाढणार पण त्यांचं गुणोत्तर स्पष्ट दिलेलं नाही. पण ते $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ आहे हे शोधता येतं. आता 15 मुलांना च चॉकोलेटं लागली, असं मानू.

$\therefore \frac{15}{च} = \frac{1}{3} \therefore 15 \times 3 = 1 \times च$ (तिरका गुणाकार)

$\therefore च = 1 \times च = 15 \times 3 = 45$ चॉकोलेटं लागतील.

उदा. 4 : प्रत्येक पिशवीत सारख्या गोट्या भरायच्या आहेत. चार पिशव्या भरायला 32 गोट्या लागतात तर सात पिशव्या भरायला किती गोट्या लागतील?

पिशव्या व गोट्या हे दोन्ही एकाच प्रमाणात वाढतात किंवा कमी होतात. म्हणून त्यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर कायम आहे.

$\frac{पिशव्या}{गोट्या} = \frac{4}{32} = \frac{\not{4}\,1}{8 \times \not{4}} = \frac{1}{8}$ असे आहे.

7 पिशव्या भरायला ग गोट्या लागतात असे मानू.

$\therefore \frac{7}{ग} = \frac{1}{8} \quad \therefore 7 \times 8 = ग.$ (तिरका गुणाकार करून)

किंवा ग = 56 गोट्या लागतील.

काही मुलांना गुणोत्तर प्रमाण या शब्दाची भीती वाटते व समीकरण मांडताना उलटे सुलटे करतात. त्यांना दोन ओळींची मांडणी करून समीकरण मिळवणं सोपं वाटतं. ती मांडणी पुढील प्रमाणे —

4 पिशव्या भरण्यास 32 गोट्या	पिशव्यांच्या संख्येखाली
7 पिशव्या भरण्यास ग गोट्या	पिशव्यांची व गोट्यांच्या संख्येखाली गोट्यांची संख्या.

$\therefore \frac{4}{7} = \frac{32}{ग}$

$\therefore 4 \times ग = 32 \times 7 = 4 \times 8 \times 7$

$\therefore ग = \frac{\not{4} \times 8 \times 7}{\not{4}} = 56.$

वरील मांडणीवरूनच $\frac{ग}{7} = \frac{32}{4}$ असेही समीकरण मांडता येते व ग = 56 हेच उत्तर मिळते.

$\frac{4}{7} = \frac{32}{ग}$ या समीकरणाचा अर्थ, पिशव्या ज्या प्रमाणात वाढतात, त्याच प्रमाणात गोट्या वाढतात असा आहे. काही मुलांना ही रीत सोपी वाटते.

उदा. 5 : सारखेच मणी असलेल्या माळा करायच्या आहेत. 27 मण्यांच्या 3 माळा होतात. 63 मणी असले, तर माळा किती होतील?

$\frac{मणी}{माळा} = \frac{27}{3}$. आता 63 मण्यांच्या म माळा होतील असे मानू.

$\therefore \frac{63}{म} = \frac{\not{27}\,9}{\not{3}\,1} = \frac{9}{1}$

$\therefore 9 \times म = 63. \therefore म = 7$ माळा होतील.

हेच गणित मांडणीने पुढील प्रमाणे करता येईल.

27 मण्यांच्या	3 माळा
63 मण्यांच्या	म माळा

$\therefore \frac{27}{63} = \frac{3}{म}$

$\therefore 27 \times म = 3 \times 63 = 3 \times 9 \times 7$

$\therefore म = \frac{\not{3} \times \not{9} \times 7}{\not{3} \times \not{9}} = 7$ माळा.

पुन्हा लक्षात ठेवा, की कुठल्याही **दोन संख्या एकाच प्रमाणात बदलत असतील, तर त्यांचं गुणोत्तर कायम असतं**. ते गुणोत्तर माहीत झालं, की दोन्हींपैकी एक संख्या समजली, तर दुसरी लगेच काढता येते. माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षर माना व गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून समीकरण मांडा, व ते सोडवा.

उदा. 6 : 5 लिटर गोडे तेलास 210 रुपये पडतात. राजश्रीजवळ 252 रुपये आहेत, तर तिला किती तेल विकत घेता येईल?

पैसे जास्त असतील, तर जास्त तेल मिळते म्हणून या दोन वस्तू सम प्रमाणात आहेत.

$\therefore \frac{\text{लिटर तेल}}{\text{रुपये किंमत}}$ हे गुणोत्तर कायम आहे.

252 रुपयांना त लिटर तेल मिळत असल्यास ते गुणोत्तर $\frac{5}{210}$ आणि $\frac{\text{त}}{252}$ असे लिहिता येते.

$\therefore \frac{\text{त}}{252} = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{210}_{42}} = \frac{1}{42}$

$\therefore \text{त} = \frac{252}{42}$ (दोन्ही बाजूंना 252 ने गुणून)

आता 42 = 7 X 6, 252 ला 7 व 6 दोघांनीही भाग जातो.

$\therefore \text{त} = \frac{36}{6}$ (7 ने भागून)

$\therefore \text{त} = \frac{6}{1} = 6$ (6 ने भागून).

252 ला 42 ने भागले तरी उत्तर 6 येते पण मोठे भागाकार करण्याऐवजी अंश व छेद, दोघांनाही भागणारे सामायिक (कॉमन) भाजक शोधून, अंश व छेद यांना भागून अपूर्णांक छोट्या रूपात, सोपा करू शकता. वरील गणित दोन ओळींची मांडणी करून,

210 रुपयांना	5 लिटर तेल
252 रुपयांना	त लिटर तेल

$\therefore \frac{\text{त}}{5} = \frac{252}{210}$ $\therefore \text{त} = \frac{252 \times \cancel{5}}{\cancel{210}_{42}} = \frac{\cancel{252}^{42}}{\cancel{42}_{7}} = 6$ असे उत्तर काढता येते.

किंवा $\frac{\text{त}}{252} = \frac{5}{210}$ असेही मांडून सोडवता येते.

सरावासाठी गणिते (6) :

1) 3 किलो तांदुळांना 48 रुपये पडतात. 8 किलो तांदुळांना किती रुपये पडतील?

2) 2 लिटर पेट्रोल मध्ये गाडी 46 किलोमीटर जाते. 161 किलोमीटर जाण्यासाठी गाडीला किती पेट्रोल लागेल?

3) 70 रुपयांना 5 किलो साखर मिळते तर 18 किलो साखरेला किती रुपये पडतील?

4) 100 रुपयांना कर्ज काढल्यास दर वर्षी 18 रुपये व्याज पडते. तर 350 रुपये कर्ज काढल्यास दर वर्षी किती व्याज द्यावे लागेल?

5) 10 किलो गव्हाला 85 रुपये पडतात. तर 24 किलो गव्हाची किंमत किती?

6) एक स्कूटर 3 लिटर पेट्रोल मध्ये 144 कि.मी. जाते. तर 336 कि.मी. अंतर जाण्यास किती पेट्रोल लागेल?

7) एक दुकानदार 15 रुपयांना 6 पेन्सिली देतो. 25 रुपयांना किती पेन्सिली मिळतील?

8) 108 मोसुंबी तीन टोपल्यांत मावतात. सर्व टोपल्यांत सारखीच मोसुंबी मावत असली, तर 180 मोसुंबी भरायला किती टोपल्या लागतील?

9) दुपारी 1 मीटर लांबीची काठी जमिनीत उभी खोचली, तेव्हा तिची सावली 30 सें.मी. पडली. त्याच वेळी एका मनोऱ्याची पडलेली सावली 27 मीटर आहे. तर मनोऱ्याची उंची किती?

4.
शेकडेवारी

गुणोत्तर प्रमाणाचा उपयोग करून शेकडेवारीची गणितं कशी करायची ते आता पाहू. अपूर्णांकांची तुलना करताना आपण पाहिलं, की वेगवेगळे अपूर्णांक जर एकाच उंचीच्या ठोकळ्यावर उभे असतील, म्हणजेच त्या अपूर्णांकांच्या छेदस्थानी एकच संख्या असेल, तर त्यांची तुलना सहज करता येते. अशा प्रकारची तुलना करताना अनेकदा गणितात 100 ही संख्या तुलनेसाठी घेतात. शेकडा म्हणजेच 100 आणि 100 शी तुलना करत सोडवण्याची गणितं म्हणजेच शेकडेवारीची गणितं. आता त्या प्रकारची काही गणितं पाहू.

उदा. 1 : सुरेशला मराठीत 75 पैकी 39 मार्क आहेत. रमेशचा मराठीचा पेपर 50 मार्कांचा होता व त्याला 50 पैकी 28 मार्क मिळाले. कुणाला जास्त चांगले मार्क आहेत?

39 ही संख्या 28 पेक्षा मोठी आहे म्हणून सुरेशचे मार्क जास्त चांगले आहेत असे म्हणता येणार नाही कारण सुरेशचे मार्क 75 पैकी तर रमेशचे 50 पैकी मार्क आहेत. आता तुलनेसाठी, प्रत्येकाचा पेपर 100 मार्कांचा असता, तर त्याला किती मार्क मिळाले असते, ते पाहू.

सुरेशच्या मार्कांचे व एकूण मार्कांचे गुणोत्तर $\frac{39}{75}$ आहे. म्हणून त्याला 100 पैकी स मार्क असतील, तर

$$\frac{स}{100} = \frac{39}{75} = \frac{13}{25} \text{ (अंश व छेद यांना 3 ने भागून)}$$

$$\therefore स = \frac{13}{\cancel{25}_1} \times \cancel{100}^4 = 52$$

∴ सुरेशला 100 पैकी 52 म्हणजेच शेकडा 52 किंवा 52 टक्के मार्क आहेत.

रमेशचे मार्क व त्याच्या पेपराचे एकूण मार्क यांचे गुणोत्तर $\frac{28}{50} = \frac{14}{25}$ आहे. म्हणून त्याला 100 पैकी र मार्क असतील किंवा शेकडा र मार्क किंवा र टक्के मार्क असतील, तर

$$\frac{र}{100} = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}$$

$$\therefore र = \frac{14 \times \cancel{100}^4}{\cancel{25}_1} = 56.$$

म्हणून रमेशला 56 टक्के किंवा शेकडा 56 मार्क.

रमेशला 56 टक्के व सुरेशला 52 टक्के मार्क आहेत. म्हणजेच रमेशला 4 टक्के मार्क जास्त, म्हणून अधिक चांगले आहेत. 56 टक्के हे 56% असेही लिहितात. % हे चिन्ह 100 च्या तुलनेसाठी लिहितात.

60% म्हणजे 60 टक्के म्हणजेच शेकडा 60 किंवा 100 पैकी साठ.

उदा. 2 : घराच्या भाड्याच्या 22% रक्कम घरपट्टी हा कर देण्यात जाते. भाडेकरूकडून भाडे घेतल्यावर त्यातून घरमालक घरपट्टी म्युन्सिपालिटीला देतो. गणोजी नावाचे घरमालक दर वर्षी 3300 रुपये घरपट्टी देतात. तर त्यांना दर वर्षी भाडे किती मिळते?

घरपट्टी भाड्याच्या 22% याचा अर्थ 100 रुपये घरभाडे असेल, तर 22 रुपये घरपट्टी असते. घरपट्टी व भाडे यांचे गुणोत्तर $\frac{22}{100} = \frac{11}{50}$ असे आहे. 3300 रुपये घरपट्टी ही ग रुपये भाड्यातून दिली असेल तर तेच गुणोत्तर $\frac{3300}{ग}$ असे आहे.

$$\therefore \frac{3300}{ग} = \frac{11}{50}$$

$$\therefore 11ग = 3300 \times 50 \text{ (तिरका गुणाकार)}$$

$$\therefore ग = \frac{\cancel{3300}^{300} \times 50}{\cancel{11}_1} = 15,000 \text{ रुपये.}$$

इथे 3300 X 50 हा गुणाकार आपण आधी केला नाही तर तो 3300 X 50 असाच लिहिला. मग 11 ने भागताना 3300 ला 11 ने भागून, नंतर गुणाकार केल्यामुळे गुणाकार व भागाकार सोपे झाले. आधीच गुणाकार केला असता, तर $3300 \times 50 = 165,000$ व $\frac{165,000}{11} = 15,000$ असे मोठे गुणाकार व भागाकार करावे लागले असते. हेच गणित मांडणीने केले असते, तर

100 रुपये भाड्यावर	22 रुपये घरपट्टी
ग रुपये भाड्यावर	3300 रुपये घरपट्टी

$\therefore \frac{ग}{100} = \frac{3300}{22}$

$\therefore 22ग = 3300 \times 100$ असे समीकरण

किंवा ग = 15,000 असे मिळाले असते.

उदा. 3 : एका गोदामात 150,000 पोती आहेत. त्यात 35% ज्वारीची, 30% गव्हाची व बाकीची तांदुळाची आहेत. तर तांदुळाची पोती किती आहेत?

हे गणित दोन प्रकारांनी सोडवता येते. प्रथम ज्वारीची व गव्हाची पोती किती आहेत ते शोधून एकूण पोत्यांतून त्यांची बेरीज वजा करू. ज्वारीची ज पोती व गव्हाची ग पोती असतील, तर

$\frac{ज}{150,000} = \frac{35}{100}, \quad \frac{ग}{150,000} = \frac{30}{100}$

$\therefore ज = \frac{35 \times 150,000}{100} = 52,500$

आणि $ग = \frac{30 \times 150,000}{100} = 45,000$

म्हणून गहू व ज्वारी मिळून 52,500 + 45,000 = 97,500 पोती आहेत.

म्हणून तांदुळाची पोती 150,000 - 97,500 = 52,500 एवढी आहेत.

दुसऱ्या प्रकाराने हे गणित करताना तांदुळाची पोती किती टक्के आहेत ते काढू. 100 पैकी 35 ज्वारीची व 30 गव्हाची म्हणजे 65 पोती गहू व ज्वारीची

मिळून आहेत. उरलेली 100 - 65 = 35 पोती तांदुळाची आहेत. म्हणून तांदुळाची 35% आहेत. तांदुळाची पोती त असतील, तर

$\frac{त}{150,000} = \frac{35}{100}$

$\therefore त = \frac{35 \times 150,000}{100} = 52,500$ पोती आहेत.

सरावासाठी पुढील उदाहरणे करा (7) :

1) प्राप्तीकर उत्पन्नाच्या 25% असेल व राजाभाऊंचे करपात्र उत्पन्न 6000 रुपये असेल, तर त्यांना किती प्राप्तीकर द्यावा लागेल?

2) एका गावात 4000 लोक आहेत त्यापैकी 58% लोक साक्षर आहेत. तर निरक्षर लोक एकूण किती आहेत?

3) श्रीपतरावांचे उत्पन्न 6500 रुपये आहे. त्यापैकी 40% शेतीसाठी व 48% घरखर्चासाठी वापरले आणि उरलेले बँकेत शिल्लक टाकले, तर किती रुपये बँकेत ठेवले?

4) मंगेशला 800 रुपये पगार आहे. तो 560 रुपये घरखर्चाला देतो. उमेशला 900 रुपये पगार आहे व तो 576 रुपये घर खर्चाला देतो. पगाराच्या मानाने कोण जास्त हिस्सा घरखर्चाला देतो?

5) घरांच्या किंमती 20% ने वाढल्या. ज्या घरास पूर्वी 75,000 रुपये लागत, त्याची नवी किंमत काय?

6) मंदीमुळे कारखान्यात 18% कपात करण्यात आली तर 25,000 कामगारांपैकी किती कामगारांना काढले?

7) सुरेशला मराठी मध्ये 75 पैकी 53, तर इतिहासात 50 पैकी 42 मार्क मिळाले, तर कुठल्या विषयात जास्त चांगले मार्क मिळाले?

8) गणपतरावांना 1997 मध्ये 5000 रुपये गुंतवणूक करून 1650 रुपये नफा मिळाला, तर 1998 मध्ये 7000 रुपये गुंतवणूक करून 2000

रुपये नफा मिळाला. कुठल्या वर्षी त्यांना जास्त चांगले उत्पन्न मिळाले?

9) सुरेश आपल्या पगाराचा 40% भाग अन्नखर्चासाठी, 25% भाग घरभाड्यासाठी व 10% भाग वाहनावर खर्च करतो, व उरलेले पैसे बँकेत ठेवतो. त्याचा पगार 4000 रुपये असेल तर तो किती रुपये बँकेत ठेवतो?

10) सुधाताई त्यांच्या पगाराचा 15% भाग म्हाताऱ्या आईकडे पाठवतात. त्या जर 375 रुपये आईकडे पाठवत असतील तर त्यांचा पगार किती?

11) रोहनला दरमहा 3200 रुपये मिळतात व मोहनला दरमहा 4500 रुपये मिळतात. रोहन घरखर्चासाठी 1900 रुपये देतो व मोहन 2475 रुपये देतो. पगाराचा जास्त हिस्सा कोण घरखर्चासाठी देतो?

12) आशाने शिवणकाम करून 1250 रुपये कमावले. त्यापैकी 75 रुपये दोरे, सुया आणण्यासाठी खर्च झाले. तर तिच्या उत्पन्नाच्या किती टक्के खर्च दोरे व सुया यांवर झाला?

5.
नफा तोटा

एखादी वस्तू विकत घेऊन जास्त किंमतीला विकली की नफा होतो म्हणजे या व्यवहारात, तो व्यवहार किंवा व्यापार करणारा पैसे कमावतो. उलट वस्तू विकताना कमी किंमत आली, तर विकणाऱ्याचा तोटा होतो. विक्रीची किंमत जास्त असेल, तर विक्री - खरेदी = नफा आणि विक्रीची किंमत कमी असेल, तर खरेदी - विक्री = तोटा हे समजायला सोपे आहे. अनेकदा नफा-तोटा हा शेकडेवारीच्या भाषेत मोजला जातो. म्हणजे दिलेल्या प्रमाणात 100 रुपये खरेदीवर तोटा किंवा नफा किती झाला, ते मोजले जाते. प्रथम हे नेहमी लक्षात असू द्या, की **नफा किंवा तोटा हा नेहमी खरेदीच्या किंमतीवर मोजला जातो.**

100 रुपये खरेदीवर 10 रुपये नफा झाला, तर 10% नफा झाला असे म्हणतात. इथे विक्रीची किंमत = 100 + 10 = 110 रुपये. 100 रुपये खरेदीवर 15 रुपये तोटा झाला, तर 15% तोटा झाला असे म्हणतात. इथे विक्रीची किंमत = 100 - 15 = 85 रुपये. नफा किंवा तोटा यांची शेकडेवारी माहीत असेल, तर नफा/खरेदी किंवा तोटा/खरेदी हे गुणोत्तर चटकन मिळते. आता हे उदाहरण पहा.

उदा. 1 : रमेशने टी.व्ही. सेट 2200 रुपयांना विकत घेतला व 2860 रुपयांना विकला. त्याला किती टक्के नफा झाला?

विक्री - खरेदी = नफा

∴ 2860 - 2200 = 660 रुपये नफा.

हा नफा 2200 रुपये खरेदीवर झाला आहे. याच प्रमाणात 100 रुपये खरेदीवर नफा किती ते काढायचे आहे. 100 रुपये खरेदीवर स नफा मानू. नफा/खरेदी हे

गुणोत्तर $\frac{660}{2200} = \frac{स}{100}$

$\therefore स = \frac{660 \times 100}{2200} = \frac{660}{22} = 30$

∴ 30% नफा झाला.

शेकडेवारीच्या पूर्वीच्या गणितांच्या प्रमाणे हे गणित दोन ओळींची मांडणी करून पुढील प्रमाणे करता येते.

2200 रुपये खरेदीवर 660 रुपये नफा

100 रुपये खरेदीवर स रुपये नफा

$\therefore \frac{स}{100} = \frac{660}{2200}$ किंवा $\frac{स}{660} = \frac{100}{2200}$

$\therefore स = \frac{660 \times 100}{2200} = 30$ हेच उत्तर मिळते.

उदा. 2 : हिरालालने एका कंपनीच्या शेअरमध्ये 4000 रुपये गुंतवले व 360 रुपये फायदा झाला. पन्नालालने 3000 रुपये दुसऱ्या कंपनीच्या शेअरमध्ये गुंतवले व त्याचा 300 रुपये फायदा झाला. कुणी जास्त चांगला फायदा मिळवला?

दोघांनी गुंतवलेले पैसे वेगवेगळे आहेत. म्हणून तुलना करण्यासाठी प्रत्येकाच्या नफ्याची टक्केवारी काढू.

हिरालालचा नफा ह% व पन्नालालचा प% मानू. म्हणजे हिरालालने 100 रुपये गुंतवले असते तर ह रुपये नफा,

$\therefore \frac{ह}{100} = \frac{360}{4000}$

$\therefore ह = \frac{360 \times 100}{4000} = \frac{36}{4} = 9$

तर $\frac{प}{100} = \frac{300}{3000} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

$\therefore प = \frac{100}{10} = 10.$

∴ हिरालालचा नफा 9%, पन्नालालचा 10% आहे. अर्थात् पन्नालालचा नफा जास्त आहे.

खरेदी, विक्री व नफा किंवा तोटा यापैकी दोन गोष्टी माहीत असतील, तर तिसरी काढता येते. शिवाय टक्केवारी चे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहिले की समीकरण मिळते; त्यामुळे ही गणिते एक प्रकारे शेकडेवारीचीच गणिते आहेत. गुणोत्तराचा अपूर्णांक व समीकरण यांचा उपयोग करून ही सोडवता येतात.

उदा. 3 : दिनेशसिंगने एक मोटारगाडी 40,000 रुपयांना घेतली व 15% नफा घेऊन विकली, तर विक्रीची किंमत काय?

इथे 15% नफा म्हणजे खरेदीची किंमत 100 रुपये असेल, तर 15 रुपये नफा.

$\therefore \frac{नफा}{खरेदी} = \frac{15}{100}$ हे गुणोत्तर मिळाले.

40,000 रुपये खरेदीवर न नफा झाला असे मानू.

मग $\frac{नफा}{खरेदी} = \frac{न}{40,000}$ असे मिळते.

$\therefore \frac{न}{40,000} = \frac{15}{100}$

$\therefore न = \frac{15 \times 40,000}{100} = 6000$

∴ नफा = 6000 व विक्री = खरेदी + नफा = 40,000 + 6000

= 46,000 रुपये.

हेच गणित दोन ओळींची मांडणी करून सोडवता येते. तसेच $\frac{नफा}{खरेदी}$ हे गुणोत्तर न घेता $\frac{विक्री}{खरेदी}$ हे गुणोत्तरही घेता येते. 100 रुपये खरेदीवर 15 रुपये नफा म्हणजे 115 रुपये विक्री.

$$\therefore \frac{\text{विक्री}}{\text{खरेदी}} = \frac{115}{100}.$$

तसेच 40,000 रुपये खरेदीवर विक्री व मानली, तर

$$\frac{\text{विक्री}}{\text{खरेदी}} = \frac{\text{व}}{40,000}$$

$$\therefore \frac{\text{व}}{40,000} = \frac{115}{100}$$

$$\therefore \text{व} = \frac{115 \times 40,0\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 46,000 \text{ रुपये.}$$

इथे नफा न काढता एकदम विक्री किंमतच काढली.

उदा. 4 : मोहनने रेडिओ 329 रुपयांना विकला, तेव्हा त्याला 6% तोटा झाला. तर त्याची खरेदीची किंमत काय होती?

6% तोटा म्हणजे 100 रुपये खरेदीवर 6 रुपये तोटा.

इथे विक्रीची किंमत दिली आहे. म्हणून याच प्रमाणात तोटा असेल तर 100 रुपये खरेदीची विक्री किंमत काढू. ती 100 - 6 = 94 आहे. आता पुन्हा $\frac{\text{विक्री}}{\text{खरेदी}}$ हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी मांडता येते. मोहनची खरेदी ख मानली, तर

$$\frac{\text{विक्री}}{\text{खरेदी}} = \frac{94}{100} = \frac{329}{\text{ख}}$$

दोन्ही बाजू **व्यस्त म्हणजेच उलट्या** करून

$$\frac{100}{94} = \frac{\text{ख}}{329}, \text{ किंवा } \frac{\text{खरेदी}}{\text{विक्री}} \text{ हे गुणोत्तर लिहूनही}$$

$$\frac{\text{ख}}{329} = \frac{100}{94} \text{ असेच समीकरण मिळते.}$$

$$\therefore \text{ख} = \frac{\overset{50}{\cancel{100}} \times 329}{\cancel{94}_{47}} \quad \text{(2 ने अंश व छेद यांना भागून)}$$

$$= 50 \times 7 = 350. \quad \text{(अंश व छेद यांना 47 ने भागून)}$$

∴ खरेदी किंमत 350 रुपये.

या गणितात विक्रीची किंमत दिली आहे म्हणून विक्रीची किंमत असणारे गुणोत्तर वापरायचे. खरेदी ऐवजी तोटा त मानून, तोटा/विक्री गुणोत्तर मांडून पुढील प्रमाणे समीकरण मिळते.

$$\frac{\text{त}}{329} = \frac{6}{94} = \frac{3}{47}$$

$$\therefore \text{त} = \frac{3 \times 329}{47} = 3 \times 7 = 21.$$

मग विक्री + तोटा = खरेदी या सूत्राने खरेदी मिळते.

उदा. 5 : चंद्रकांतने नागपूरहून 30 रुपयांना एक प्रमाणे संत्र्यांच्या 15 करंड्या मागवल्या. त्यांच्यासाठी रेल्वे भाडे 75 रुपये द्यावे लागले. नंतर त्याने त्या 42 रुपयांना एक याप्रमाणे विकल्या. त्याला किती टक्के नफा झाला?

अशा प्रकारच्या गणितात वस्तूच्या खरेदीत, त्या व्यवहारासाठी केलेला सगळा खर्च मिळवून, एकूण खर्च हीच खरेदीची किंमत असते व नफा, तोटा या किंमतीवर मोजायचा. इथे करंड्यांची किंमत 30 X 15 = 450 रुपये आहे. व रेल्वे भाडे 75 रुपये. म्हणून एकूण खरेदीचा खर्च = 450 + 75 = 525 रुपये आहे. विक्री किंमत = 15 X 42 = 630 रुपये आहे. म्हणजे 525 रुपये खरेदीवर 630 - 525 = 105 रुपये नफा झाला. तोच न% असेल, तर

$$\frac{\text{नफा}}{\text{खरेदी}} = \frac{\text{न}}{100} = \frac{105}{525} = \frac{21}{105} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{न} = \frac{100}{5} = 20.$$

∴ नफा 20% झाला.

उदा. 6 : एका दुकानदाराने 80 रुपयांना एक याप्रमाणे 25 साड्या आणल्या. त्यापैकी 15 साड्या 110 रुपयांना एक याप्रमाणे विकल्या व उरलेल्या 80 रुपयांना एक याप्रमाणे विकून टाकल्या. या व्यवहारात त्याला किती टक्के नफा झाला?

एकूण खरेदी व एकूण विक्री काढायची आहे.

खरेदी खर्च = 80 X 25 = 2000 रुपये.

विक्री किंमत = 15 X 110 + 10 X 80

= 1650 + 800 = 2450 रुपये आहे.

कारण 15 साड्या 110 रुपयांना एक प्रमाणे व 10 साड्या 80 रुपयांना एक याप्रमाणे विकल्या.

∴ नफा = 2450 - 2000 = 450 रुपये आहे. तो न% असेल, तर

$\frac{न}{100} = \frac{450}{2000}$ कारण 2000 रुपये खरेदीवर 450 रुपये नफा आहे.

∴ $न = \frac{450 \times 100}{2000} = 22\frac{1}{2} = 22.5$

नफा-तोट्याची गणिते करताना लक्षात ठेवा —

1) नफा किंवा तोटा हा एकूण खरेदीच्या खर्चावर मोजतात. न% नफा म्हणजे 100 रुपये खरेदीवर न रुपये नफा.

2) $\frac{नफा}{खरेदी}$, $\frac{विक्री}{खरेदी}$, $\frac{तोटा}{विक्री}$, $\frac{तोटा}{खरेदी}$, $\frac{नफा}{विक्री}$ यापैकी कुठले गुणोत्तर मांडणे शक्य आहे, ते दिलेल्या माहितीवरून ठरवा.

3) दिलेल्या व्यवहारातील एक व 100 रुपये खरेदीच्या व्यवहारातील एक अशी दोन गुणोत्तरे समान असतात. एकच गुणोत्तर दोन प्रकारांनी मांडताना माहीत नसलेल्या रकमेसाठी अक्षर माना व त्या अक्षराचे समीकरण मिळवा. मग ते सोडवून अक्षराची किंमत मिळेल.

सरावासाठी गणिते (8) :

1) मोहनने 2 किलो तेलाचा डबा 90 रुपयांना घेतला. तो फुटल्यामुळे काही तेल गळून गेले. उरलेले तेल त्याने 72 रुपयांना विकून टाकले. त्याचा किती टक्के तोटा झाला?

2) सूर्यकांतने एक डझन फौंटन पेने 30 रुपयांना घेतली व ती प्रत्येकी 3 रुपयांना विकली. त्याला नफा किती टक्के झाला?

3) रमेशने एक टी.व्ही. सेट 3000 रुपयांना घेतला. त्याला 15% नफा हवा असेल, तर तो किती रुपयांना विकावा?

4) 300 रुपये क्विंटल या दराने 4 क्विंटल तांदूळ आणले. ते आणताना गाडी भाडे 100 रुपये द्यावे लागले. ते सगळे तांदूळ 4 रुपये किलो या दराने विकले, तर किती टक्के फायदा झाला?

5) राजेशने दोन डझन फौंटन पेने खरेदी केली. ती प्रत्येकी 15 रुपयांना विकली. तेव्हा त्याला 20% नफा झाला. तर त्याने ती किती रुपयांना खरेदी केली होती?

6) रोहिदासने 250 रुपयांना एक याप्रमाणे चार आंब्यांच्या पेट्या आणल्या प्रत्येक पेटीत चार डझन आंबे होते. त्यापैकी सहा आंबे सडल्यामुळे फेकावे लागले. उरलेले आंबे किती रुपयांना डझन याप्रमाणे विकावे म्हणजे त्याला 24% फायदा होईल?

7) शामलालने काचेच्या 50 बरण्या खरेदी केल्या त्यापैकी 8 बरण्या फुटून गेल्या उरलेल्या त्याने 30 रुपयांना एक याप्रमाणे विकल्या. त्याला एकूण 26% फायदा झाला. त्याने त्या बरण्या, प्रत्येकी किती रुपयांना खरेदी केल्या होत्या?

8) मोहनदासने 15 किलो तेलाचा डबा खरेदी केला. तो उघडताना धक्का लागून पडला व 4 किलो तेल सांडून गेले. उरलेले तेल त्याने 45 रुपये किलो प्रमाणे विकले. त्याला या व्यवहारात एक टक्का तोटा सहन करावा लागला. त्याने किती रुपयांना तेलाचा डबा खरेदी केला होता?

6.

सरळ व्याज

पैसे कर्जाऊ घेतले, की ते वापरायला मिळतात, त्याबद्दल जो कर्ज देतो, त्याला व्याज द्यायचे असते. व्याजाचा दर जर कायम असेल आणि ते कर्ज सरळ व्याजाने काढले असेल तर यासंबंधी गणिते देखील गुणोत्तर मांडून किंवा दोन ओळींची मांडणी करून सोडवता येतात. इथे माहीत नसलेल्या संख्येसाठी अक्षर मानले जाते. मग एकच गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून किंवा दोन ओळींची मांडणी करून समीकरण मिळते. हे सोपे समीकरण सोडवून अक्षराची किंमत मिळते. व्याजाचा दर द.सा.द.शे. म्हणजे दर साल दर शेकडा किंवा 100 रुपये कर्जावर प्रत्येक वर्षी किती व्याज घेतले जाते ती रक्कम. व्याजाचा दर द.सा.द.शे. 18 म्हणजे 100 रुपये कर्जावर एका वर्षाला 18 रुपये व्याज आहे. या प्रकारच्या गणितात काही विशिष्ट नावे वापरली जातात. जी रक्कम कर्जाऊ घेतली जाते, तिला **मुद्दल** म्हणतात. जेवढ्या काळासाठी कर्ज आहे, तो काळ म्हणजे **मुदत**. पैसे परत करताना मूळ मुद्दल व व्याज असे दोन्ही परत करायचे असते, या दोन्हींची बेरीज म्हणजे **रास**.

रास = मुद्दल + व्याज.

या विभागातली गणिते करताना व्याज, मुद्दल, रास, मुदत यापैकी कुठल्या दोन गोष्टींचे गुणोत्तर घ्यायचे हे ठरवावे लागते.

काही नमुन्याची उदाहरणे पहा.

उदा. 1 : द.सा.द.शे. 12 रुपये दराने 600 रुपये कर्जावर 4 वर्षात किती व्याज द्यावे लागले?

प्रथम 100 रुपयांवर 4 वर्षात किती व्याज द्यावे लागले, ते काढू. एका वर्षात 12 रुपये असेल, तर चार वर्षात 12 X 4 = 48 रुपये एवढे व्याज होईल.

त्याच प्रमाणात 600 रुपयांवर व्याज काढायचे आहे. ते व आहे असे मानू. 100 रुपये मुद्दलावरचे व्याज 48 रुपये आहे हे आपल्याला समजले आहे.

आता $\frac{\text{व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहू.

$$\frac{\text{व}}{600} = \frac{48}{100}$$

$$\therefore \text{व} = \frac{48 \times 600}{100}$$ (अंश व छेद यांना 100 ने भागून)

= 288 रुपये.

∴ 600 रुपये मुद्दलावर चार वर्षात 288 रुपये व्याज होईल. हेच गणित दोन ओळींच्या मांडणीने

100 रुपये मुद्दलावर	48 रुपये व्याज	$\frac{\text{व}}{600} = \frac{48}{100}$
600 रुपये मुद्दलावर	व रुपये व्याज	$\therefore \text{व} = \frac{48 \times 600}{100} = 288$

∴ व = 288 असे सोडवता येईल.

वरील दोन्ही प्रकारांत आपण आधी 100 रुपये मुद्दलावरचे दिलेल्या मुदतीचे व्याज काढले व मग हव्या त्या मुद्दलावरचे त्याच मुदतीचे व्याज काढले.

सरळ व्याजाची या प्रकारची गणिते करण्यासाठी पुढील सूत्र देखील वापरता येते.

$$\textbf{एकूण व्याज} = \frac{\text{व्याजदर} \times \text{मुदत} \times \text{मुद्दल}}{100}$$

हे ते सूत्र आहे. एका रुपयाचे 1 वर्षाचे व्याज = $\frac{\text{व्याजदर}}{100}$

∴ दिलेल्या मुद्दलाचे जास्त मुदतीचे व्याज काढण्यासाठी $\frac{\text{व्याजदर}}{100}$ ला मुदत व मुद्दल यांनी गुणावे.

एकूण व्याज = $\frac{\text{व्याजदर X मुदत X मुद्दल}}{100}$ या सूत्रात 100 च्या शिवाय एकूण चार संख्या आहेत. त्यापैकी तीन माहीत असतील, तर चौथ्या संख्येसाठी अक्षर मानून समीकरण सोडवता येते. वरील गणितात,

व = $\frac{12 \times 4 \times 600}{100}$ = 288 असेच उत्तर मिळते.

उदा. 2 : सुलोचनाने द.सा.द.शे. 15 रुपये दराने कर्ज काढले. दोन वर्षांनी ते फेडताना तिला 450 रुपये व्याज द्यावे लागले तर किती कर्ज काढले होते?

इथे मुदत 2 वर्षे आहे. 100 रुपये मुद्दलावर दोन वर्षात 30 रुपये व्याज होईल. मुद्दल म रुपये होते असे मानल्यास

$\frac{\text{मुद्दल}}{\text{व्याज}} = \frac{\text{म}}{450} = \frac{100}{30}$ असे समीकरण मिळते.

$\therefore$ म = $\frac{100 \times \cancel{450}^{15}}{\cancel{30}}$ = 1500 हे उत्तर मिळाले.

दोन ओळींची मांडणी करून

100 रुपये मुद्दलावर	30 रुपये व्याज
म रुपये मुद्दलावर	450 रुपये व्याज

$\therefore \frac{\text{म}}{450} = \frac{100}{30}$ किंवा $\frac{\text{म}}{100} = \frac{450}{30}$ असे समीकरण मिळते. त्यातूनही म = 1500 असे उत्तर येते.

सूत्र वापरताना

450 = $\frac{15 \times 2 \times \text{म}}{100}$

$\therefore$ म = $\frac{450 \times 100}{30}$ = 1500 हेच उत्तर मिळते.

एकूण व्याज = $\frac{\text{व्याजदर X मुदत X मुद्दल}}{100}$ हे सूत्र इथे वापरले आहे व मुद्दल = म सोडून सर्व संख्या माहीत आहेत.

उदा. 3 : द.सा.द.शे. 10 दराने 3600 रुपये मुद्दलाचे 1440 रुपये व्याज मिळण्यास किती वर्षे कर्ज द्यावे लागेल?

3600 रुपये मुद्दलावर 1440 रुपये व्याज येण्यास प वर्षे लागतात असे मानू. 100 रुपये मुद्दलावर तेवढ्या वर्षात 10प रुपये व्याज होईल. मग $\frac{\text{व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून

$\frac{1440}{3600} = \frac{10\text{प}}{100}$

$\therefore$ प = $\frac{1\cancel{0} \times 144\cancel{0}}{36\cancel{00}} = \frac{16}{4}$ = 4 वर्षे हे उत्तर.

सूत्र वापरून

1440 = $\frac{10 \times 36\cancel{00} \times \text{प}}{1\cancel{00}}$ $\therefore$ प = $\frac{144\cancel{0}}{1\cancel{0} \times 30}$ = 4 हेच उत्तर.

उदा. 4 : 2500 रुपये कर्ज रखमाबाईंनी सरळ व्याजाने काढले. 5 वर्षांनी पैसे परत करताना एकूण 3750 रुपये परत करावे लागले. तर व्याजाचा दर काय होता?

व्याजाचा दर द होता असे मानू. 100 रुपयांचे 5 वर्षांनी व्याज 5द होईल.

रखमाबाईंना व्याज = रास - मुद्दल = 3750 - 2500 = 1250 रुपये.

$\frac{\text{व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून

$\frac{5\text{द}}{100} = \frac{1250}{2500}$ $\therefore$ द = $\frac{1250 \times 20}{2500}$ = 10 रुपये.

सूत्र वापरूनही

1250 = $\frac{\text{द} \times 5 \times 25\cancel{00}}{1\cancel{00}}$

$\therefore$ द = $\frac{1250}{125}$ = 10 रुपये हेच उत्तर.

सरळ व्याजाची गणिते करताना खरे मुद्दल, त्यावरचे दिलेल्या मुदतीचे व्याज व 100 रुपयांच्या मुद्दलावर तेवढ्याच मुदतीचे व्याज यांची तुलना करतात. $\frac{\text{व्याज}}{\text{मुद्दल}}$ किंवा $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ अशी गुणोत्तरे 100 रुपये मुद्दलावर व दिलेल्या मुद्दलावर अशी दोन्ही प्रकारांनी मांडून समीकरण मिळवावे किंवा व्याजाचे सूत्र मांडून माहीत असलेल्या संख्या घालून समीकरण मिळवावे.

सरावाची गणिते (9) :

1) द.सा.द.शे. 10 दराने 700 रुपये मुद्दलावर तेवढेच व्याज मिळण्यास किती वर्षे कर्ज द्यावे लागेल?

2) द.सा.द.शे. 8 दराने 450 रुपयांची 7 वर्षांची रास किती होईल?

3) द.सा.द.शे. 9 दराने हेमाने कर्ज काढले. आठ वर्षांनी तिला एकूण 1290 रुपये द्यावे लागले. तर हेमाने किती कर्ज काढले होते?

4) 6400 रुपयांचे 7 वर्षांचे व्याज 5376 रुपये होते. तर व्याजाचा दर काय असेल?

5) द.सा.द.शे. 15 रुपये व्याजाने 5000 रुपये कर्ज काढले होते व ते परत करताना 9500 रुपये द्यावे लागले. तर किती वर्षांनी कर्ज फेडले?

6) घरासाठी 60,000 रुपये कर्ज घेऊन दोन वर्षांनी ते फेडताना 72,000 रुपये द्यावे लागले तर व्याजाचा दर काय होता?

7) सावकाराकडे रामरावांनी 10,000 रुपये ठेव ठेवली. सावकार त्या रकमेवर द.सा.द.शे. 12 प्रमाणे व्याज देतो. कुशाभाऊंनी सावकाराकडून 9,000 रुपये कर्ज द.सा.द.शे. 18 व्याजाने घेतले. कुशाभाऊंनी दोन वर्षांनी कर्ज व्याजासहित फेडले व रामरावांनीही आपली ठेव दोन वर्षांनी परत नेली. या दोन्ही व्यवहारात मिळून सावकाराचा फायदा किती झाला?

8) सीमाने दुकानासाठी बँकेचे कर्ज द.सा.द.शे. 16 दराने घेतले. 3 वर्षांनी ते फेडताना तिला 66,600 रुपये द्यावे लागले. तर तिने किती कर्ज काढले होते?

9) योगेशने द.सा.द.शे. 9 दराने 2400 रुपये कर्ज काढले व ते फेडताना 3480 रुपये भरले तर ते कर्ज किती वर्षांसाठी काढले होते?

10) द.सा.द.शे. 20 दराने बँकेचे कर्ज काढले. परत करताना मुद्दलाच्या दीडपट रक्कम परत करावी लागली तर कर्ज किती वर्षांसाठी काढले होते?

7.
दशांश अपूर्णांक

अपूर्णांक लिहिताना ते व्यवहारी अपूर्णांकाच्या किंवा परिमेय संख्येच्या रूपात लिहायला आपण शिकलो आहोत. कधी कधी त्यातला पूर्णांकाचा भाग आपण वेगळा काढतो. जसे $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$ कारण $\frac{8}{5}$ याचा अर्थ एक या संख्येचे 5 सारखे भाग करून तसे आठ भाग घेणे. त्यातील 5 भाग घेतले की एक पूर्ण संख्या होते आणि एवढे 3 भाग शिल्लक राहतात. $\frac{1}{5}$ एवढे तीन भाग म्हणजेच $\frac{3}{5}$ हे आपल्याला ठाऊक आहे. $\frac{8}{5}$ हा अपूर्णांक आणखी एका पद्धतीने म्हणजे दशांश अपूर्णांक असा लिहिता येतो. $\frac{8}{5} = 1.6$ हे त्याचं दशांश रूप झालं. $1.6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$. इथे 1.6 मध्ये टिंबानंतर 6 हा आकडा आहे म्हणून 1.6 चा अर्थ $\frac{16}{10}$ असा आहे. 1.62 चा अर्थ $\frac{162}{100}$ असा आहे. **दशांश चिन्हानंतर म्हणजेच टिंबानंतर जेवढे आकडे, तेवढी शून्ये एकावर लिहून तो छेद घ्यायचा आणि अपूर्णांकातील टिंब काढून बनणारी साधी संख्या अंश स्थानी ठेवायची.** जसे $3.51 = \frac{351}{100}$, $12.7 = \frac{127}{10}$, $5.04 = \frac{504}{100}$, $20.08 = \frac{2008}{100}$.

3.51 हा अपूर्णांक $3.51 = \frac{351}{100} = 3\frac{51}{100}$ असाही लिहिता येतो. एकच अपूर्णांक वेगवेगळ्या प्रकारांनी लिहायला शिका. जसे एकच विद्यार्थी वेगवेगळे कपडे घालून आला, तरी विद्यार्थी तोच असतो, तसेच अपूर्णांकांच्या वेगवेगळ्या रूपांचे आहे. दिलेल्या गणितात, अपूर्णांकाचे कुठले रूप फायद्याचे होईल ते ओळखायला शिका.

दशांश अपूर्णांकाचे विशेष गुणधर्म ध्यानात ठेवा.

1) दशांश अपूर्णांकाचे व्यवहारी अपूर्णांकात किंवा परिमेय संख्येत रूपांतर करताना, दशांश अपूर्णांकातील टिंबानंतरच्या आकड्यांची संख्या = व्यवहारी अपूर्णांकाच्या छेदातील, एका नंतरच्या शून्यांची संख्या.

2) दशांश अपूर्णांकाच्या टिंबा आधीचा भाग हा पूर्ण अंक असतो, तर टिंबा नंतरचा भाग हा एक पेक्षा कमी असा अपूर्णांक असतो. कारण 3.51 हा अपूर्णांक पुन्हा पहा.

$3.51 = \frac{351}{100} = 3\frac{51}{100}$ इथे 3 हा पूर्णांक आहे तर $.51 = \frac{51}{100}$ हा अपूर्णांक आहे. $5.04 = \frac{504}{100} = 5\frac{4}{100}$, इथे 5 हा पूर्णांक आहे, तर $.04 = \frac{4}{100}$ हा अपूर्णांक आहे. 12.7 मध्ये $.7 = \frac{7}{10}$ हा अपूर्णांक आहे.

3) दशांश अपूर्णांकामध्ये पूर्णांकाच्या आधी आणि अपूर्णांकाच्या भागाच्या नंतर कितीही शून्ये दिली, तरी त्या संख्येच्या किंमतीमध्ये बदल होत नाही. जसे

$3.51 = 003.51 = 3.51000 = 3.510$

कारण 3 = 003 हे आपल्याला ठाऊक आहे. तसेच

$.51 = \frac{51}{100} = \frac{510}{1000} = .510 = \frac{51,000}{100,000} = .51000.$

l) साध्या व्यवहारी अपूर्णांकाचा दशांश अपूर्णांक करताना छेद हा 10, 100, 1000 या प्रकारचा करता आला तर काम सोपे होईल. आता $\frac{3}{5}$ ला दशांश अपूर्णांकाच्या रूपात लिहिताना छेद 10 करता येतो. $\frac{3}{5} = \frac{3 X 2}{5 X 2} = \frac{6}{10}$, $\therefore \frac{3}{5} = .6$ असे चटकन मिळू शकते. किंवा $\frac{8}{25} = \frac{8 X 4}{25 X 4} = \frac{32}{100} = .32$ असे लिहिता येते. इथे पुन्हा छेदात एकावर जेवढी शून्ये, तेवढे आकडे टिंबा नंतर येतात हेच लक्षात ठेवायचं. मात्र $\frac{3}{100}$ हा अपूर्णांक पहा. टिंबा नंतर दोन आकडे हवेत. आता 3 या **पूर्णांकाच्या आधी कितीही शून्ये दिली तरी**

त्याची किंमत बदलत नाही. म्हणून $\frac{3}{100} = \frac{03}{100} = \frac{003}{100}$ हे ध्यानात घेऊन $\frac{3}{100} = .03$ हे रूप द्या.

$\frac{3}{100} = 0.03$ असेही लिहिता येते.

आता इतर व्यवहारी अपूर्णांकांचे दशांश अपूर्णांकात कसे रूपांतर करायचे पहा. $\frac{132}{8}$ हा अपूर्णांक घेऊ.

$\frac{132}{8}$ म्हणजे 132 ला 8 ने भागल्यावर येणारी संख्या. तर भागाकार करू. मात्र 132 = 132.000 हे ध्यानात ठेवा.

```
     16
8) 132.000...
   -8
    52
   -48
     4
```

आता पूर्णांकाचा भाग संपला. तर टिंबा पुढचा अपूर्णांकाचा भाग वापरून त्यातील आकडे म्हणजे शून्ये उतरवायची म्हणून भागाकारातही अपूर्णांकाचा भाग सुरू करायचा. म्हणजे दशांशाचे टिंब लिहून पुढचा भागाकार करायचा.

```
     16.5
8) 132.000...
   -8
    52
   -48
     40
    -40
     00
```

या ठिकाणी अपूर्णांकाच्याभागातील एक शून्य उतरवल्यावर भागाकार एका क्रियेनंतर पूर्ण झाला व बाकी शून्य उरली. व $\frac{132}{8} = 16.5$ असे मिळाले.

```
    5.625
8) 45.000...
  -40
    50
   -48
     20
    -16
     40
    -40
     00
```

$\frac{45}{8}$ पहा.

शेजारी दाखवलेला भागाकार केला.

$\therefore \frac{45}{8} = 5.625.$

या भागाकारात टिंबा नंतरची तीन शून्ये एका मागोमाग उतरवली नंतर बाकी शून्य येऊन भागाकार संपला.

आता $\frac{32}{9}$ पहा. येथे भागाकार पुढील प्रमाणे होतो.


```
    3.55
9) 32.000...
  -27
    50
   -45
    50
   -45
     5
```

आता या गणितात भागाकार संपणार नाही. बाकी शून्य येणारच नाही. मग हा अपूर्णांक $\frac{32}{9} = 3.\bar{5}$ किंवा $3.\dot{5}$ असा लिहितात म्हणजे 5 ही संख्या सतत येत रहाते किंवा तिचे आवर्त सतत येत रहातात. कधी कधी दोन किंवा तीन दशांश स्थळांपर्यंतच उत्तर हवे असते. मग $\frac{32}{9} = 3.55$ किंवा 3.555 असे अंदाजे उत्तर लिहितात. बाकी भाजकाच्या अध्यपिक्षा जास्त असेल तर शेवटचा आकडा एकाने वाढवतात. जसे

$\frac{33}{9} = 3.666 = 3.\bar{6} = 3.67$ (अंदाजे)

5) दशांश अपूर्णांकाच्या बेरजा व वजाबाक्या सोप्या असतात. व्यवहारी अपूर्णांकांच्या प्रमाणे समान छेद देण्याची जरूरी नसते. फक्त संख्या एका खाली एक लिहून, बेरीज, वजाबाकी करायची. मात्र वरच्या संख्येच्या टिंबा खाली खालच्या संख्येचे टिंब आले पाहिजे. जसे

```
  351.25
+  47.92
  399.17
```

पुन्हा, हातचे साध्या बेरजे किंवा वजाबाकी सारखेच घ्यायचे.

इथे बेरीज करताना हातचे अंक नेहमी प्रमाणे मिळवायचे, दशांशाच्या टिंबाची जागा मात्र नीट पहा.

वजाबाकीतही तीच क्रिया करायची.

```
  351.25
-  47.92
  303.33
```

6) दशांश अपूर्णांकांचे गुणाकार देखील साध्या संख्यांच्या गुणाकारांसारखे करतात, मात्र टिंबाची जागा नीट ठरवायची. दोन संख्यांचा गुणाकार करताना

प्रत्येक संख्येतील टिंबा नंतर किती आकडे आहेत, ते पहा. त्या आकड्यांच्या संख्यांची बेरीज करून, गुणाकाराच्या संख्येत टिंबा नंतर त्या बेरजेएवढे आकडे आले पाहिजेत. जसे

```
   3.51
 X 1.7
 ------
  5.967
```

इथे 351 X 17 हा साधा गुणाकार केला. 3.51 मध्ये टिंबा नंतर 2 आकडे, 1.7 मध्ये टिंबानंतर 1 आकडा आहे. म्हणून गुणाकारात टिंबा नंतर 3 आकडे हवेत. म्हणून गुणाकार 5.967 असा झाला.

टिंबाचे स्थान असे का ठरते, ते व्यवहारी अपूर्णांकात रूपांतर केले की समजते.

$$3.51 \times 1.7 = \frac{351}{100} \times \frac{17}{10} = \frac{351 \times 17}{1000} = \frac{5967}{1000} = 5.967.$$

दशांश अपूर्णांकांना 10, 100, 1000 ने गुणणे अगदीच सोपे असते. ते खूप उपयोगी पडते.

3.51 X 10 = 35.10 = 35.1 इथे टिंब एक जागा उजवीकडे आले.

3.51 X 100 = 351.00 = 351 किंवा 351. इथे टिंब 2 जागा उजवीकडे आले.

तेव्हा नियम लक्षात ठेवा, दशांश अपूर्णांकाला 10 ने गुणणे म्हणजे टिंब एक जागा उजवीकडे नेणे, 100 ने गुणणे म्हणजे टिंब दोन जागा उजवीकडे नेणे, तसेच 100,000 ने गुणणे म्हणजे टिंब पाच जागा उजवीकडे नेणे. म्हणून

3.51 X 1000 = 3.510 X 1000 = 3510

3.51 X 100,000 = 3.5100000 X 100,000 = 351,000.00

(पुन्हा ध्यानात घ्या की 3.51 = 03.510 = 03.5100000 इत्यादि.)

7) दशांश अपूर्णांकाला 10, 100, 1000 अशा संख्यांनी भागणेही अगदी सोपे असते.

$\frac{3.51}{10}$ = 3.51 ÷ 10 हा भागाकार पाहू.

```
     0.351
10) 3.51
    -0
    ---
     35
    -30
    ---
      51
     -50
     ---
      10
     -10
     ---
      00
```

इथे 3.51 मधील टिंब एक जागा डावीकडे नेले हे लक्षात आले का?

तसेच $\frac{14.6}{10}$ = 1.46 हे करून पहा.

$\frac{3.51}{100}$ किंवा 3.51 ÷ 100

इथे 100 ने भागले म्हणजे 3.51 या अपूर्णांकातले दशांश चिन्ह 2 जागा डावीकडे नेले हे पाहिले का?

```
      0.0351
100) 3.51
     -0
     ---
      35
     -0
     ---
      351
     -300
     ----
       510
      -500
      ----
       100
      -100
      ----
       000
```

$\frac{3.51}{100}$ = .0351 = 0.0351.

आणि 3 च्या आधी कितीही शून्ये दिली तरी 3.51 ची किंमत बदलत नाही. हे लक्षात घ्या 3.51 = 003.51 = 00003.51.

एका दशांश अपूर्णांकाने दुसऱ्या दशांश अपूर्णांकाला भागताना भाजकाचा पूर्णांक करून घेता येतो. मात्र तो पूर्णांक करताना दशांशाचे टिंब जितकी घरे उजवीकडे न्यावे लागते, तेवढीच घरे भाज्य संख्येतील दशांशाचे टिंबही हलवावे लागते.

उदा. $\frac{50.34}{2.4} = \frac{503.4}{24}$ (अंश व छेद या दोघांनाही 10 ने गुणले.)

∴ 50.34 ÷ 2.4 = 503.4 ÷ 24

किंवा $\frac{.45}{.215} = \frac{.450}{.215} = \frac{450.}{215.} = \frac{450}{215}$

∴ .45 ÷ .215 = 450 ÷ 215

तसेच $\frac{3.07}{.5} = \frac{30.7}{5}$

$\therefore 3.07 \div .5 = 30.7 \div 5.$

```
    20.975
24) 503.4
   -48
    23
   -0
    234
   -216
     180
    -168
      120
     -120
      000
```

भाजक पूर्णांक असेल तर भागाकार करण्याची पद्धत माहीत आहेच. दशांश टिंबा नंतरचा आकडा खाली उतरवला की भागाकारातही दशांश टिंब लिहायचे.

$\therefore \frac{50.34}{2.4} = \frac{503.4}{24} = 20.975.$

सरावासाठी गणिते (10) :

(1) पुढील बेरजा व वजाबाक्या करा :

1) 425.02 + 107.8
2) 13.65 + 6.928
3) 913.04 - 69.77
4) 49.6 - 24.834
5) 80.16 - 16.64
6) 1267 - 804.23
7) 79.47 + 13.59
8) 560 - 125.501
9) 91.26 + 23.74
10) 62.3001 + 4

(2) खालील गुणाकार व भागाकार चटकन करा :

1) 1522.4 ÷ 10
2) 50.78 ÷ 100
3) 1877.16 X 100
4) 924 X 1000
5) 65.1 X 100
6) 78 ÷ 1000
7) 5.39 X 10
8) 60.4 X 100
9) 20.03 X 1000
10) 0.45 X 100

(3) पुढील गुणाकार व भागाकार करा :

1) 5.12 X .25
2) .625 X .4
3) 67.8 ÷ 1.8
4) 17.28 ÷ .123
5) 975.5 X .14
6) 72.9 ÷ .27
7) 454.5 X .68
8) 22.16 ÷ 6.4
9) 528 X .15
10) 18 ÷ 216.

8.

व्यस्त प्रमाणाची गणिते (काळ, काम, वेग)

आतापर्यंत ज्या संख्या सम प्रमाणात बदलतात, त्यांची गणिते पाहिली. आता विरुद्ध प्रमाणात बदलणाऱ्या संख्यांची गणिते पहाणार आहोत. व्यस्त किंवा विरुद्ध प्रमाणात बदलणाऱ्या संख्या ओळखणे हे फार महत्त्वाचे असते. मग सूत्राऐवजी, अनेकावरून एक व एकावरून अनेक या क्रमाने गणित सोडवले, तर गोंधळ होत नाही व चुका होण्याची शक्यता कमी असते. व्यस्त प्रमाणाच्या उदाहरणासाठी हे गणित पहा.

एक माणूस एक भिंत बांधायला दहा दिवस घेतो. दोन माणसांना तीच भिंत बांधायला किती दिवस लागतील?

इथे माणसे वाढवली तर दिवस न वाढता कमी होणार आहेत म्हणून हे व्यस्त प्रमाणाचे गणित आहे. या उलट एक माणूस दहा पुऱ्या खातो तर दोन माणसे किती पुऱ्या खातील हे तुम्हाला माहित आहे. पुऱ्या खाण्याचे गणित सम प्रमाणाचे आहे. म्हणजे माणसे वाढली तर पुऱ्याही वाढतील. माणसे व पुऱ्या यांचे गुणोत्तर कायम आहे.

आता भिंत बांधण्याच्या बाबतीत दोन माणसे तीच भिंत अर्ध्या वेळात म्हणजे 5 दिवसात बांधतील, पाच माणसे तीच भिंत दोन दिवसात बांधतील. माणसे व कामाचा वेळ यांचे गुणोत्तर कायम नाही. **एका माणसाला काम करायला जेवढा वेळ लागतो, त्या वेळाला जेवढी माणसं आहेत, त्या आकड्याने भागलं की तेवढ्या माणसांना त्याच कामाला किती वेळ लागतो ते कळते.**

$$\frac{\text{एका माणसाला लागणारा वेळ}}{\text{एकूण माणसांची संख्या}} = \text{एकूण माणसांना लागणारा वेळ.}$$

वरील समीकरण असेही लिहिता येईल :

एका माणसाला लागणारा वेळ =

(एकूण माणसांची संख्या) X तेवढ्या माणसांना लागणारा वेळ.

आणखी काही गणिते पाहू.

उदा. 1 : एका टाकीला पाच सारखे नळ आहेत. पूर्ण भरलेली टाकी, दोन नळ सोडल्यास 10 तासात रिकामी होते. पाचही नळ सोडले, तर किती वेळात रिकामी होईल?

नळ जास्त सोडले तर वेळ कमी लागणार म्हणजे व्यस्त प्रमाणाचे गणित आहे किंवा नळाची संख्या व लागणारा वेळ या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत.

दोन नळ सोडले तर टाकी रिकामी करण्यास 10 तास

∴ एक नळ सोडला तर टाकी रिकामी करण्यास 20 तास

∴ पाच नळ सोडले तर टाकी रिकामी करण्यास 4 तास.

कारण $\frac{\text{एका नळाला लागणारे तास}}{5}$ = 5 नळांना लागणारे तास

तसेच $\frac{\text{एका नळाला लागणारे तास}}{2}$ = 2 नळांना लागणारे तास.

या गणितात मजुरांऐवजी नळ काम करत आहेत असं म्हणता येईल.

उदा. 2 : 12 मजूर एक घर 48 दिवसात बांधतात. अशी 2 घरे बांधायची आहेत व 32 दिवसात पुरी करायची आहेत. तर किती मजूर लागतील?

इथे कामही दुप्पट होणार आहे कारण दोन घरे बांधायची आहेत. आपण दोन घरं बांधणं हेच काम आहे असं लक्षात घेऊ. मग दिलेल्या माहितीप्रमाणे 12 मजूर हे काम 48 X 2 = 96 दिवसात करतात. आता मजुरांची संख्या व लागणाऱ्या दिवसांची संख्या या व्यस्त प्रमाणात आहेत.

12 मजूर 96 दिवसात काम करतात.

∴ 1 मजूर 12 X 96 दिवसात काम करेल.

कारण एका मजुराला लागणारा वेळ = 12 X 12 मजुरांना लागणारा वेळ. आता ग मजूर हे काम 32 दिवसात करतात असे मानू.

∴ एका मजुराला लागणारा वेळ = 12 X 96 = 32 X ग

$$\therefore \text{ग} = \frac{12 \times \cancel{96}^{12}}{\cancel{32}_4} = \frac{\cancel{12}^{3} \times 12}{\cancel{4}} = 36.$$

∴ 36 मजूर दोन घरे 32 दिवसात बांधतील.

या गणितात 12 X 96 हा गुणाकार केला नाही. पण या संख्येला 32 ने भागताना 'काटाकाटीचे' गणित करून अपूर्णांक छोट्या रूपात मिळवला. ही युक्ति वापरणे सोयीचे असते. मोठे गुणाकार व भागाकार टाळता येतात.

उदा. 3 : रोज 4 गणिते केली, तर गणितांचा एक संग्रह 12 दिवसात संपतो. रोज 6 गणिते केली तर किती दिवसात संपेल?

रोजच्या गणितांची संख्या वाढवली, तर दिवस कमी लागणार म्हणजे व्यस्त प्रमाणाचे गणित आहे. किंवा रोजच्या गणितांची संख्या व दिवसांची संख्या या व्यस्त प्रमाणात आहेत.

रोज 4 गणिते केल्यास 12 दिवस

∴ रोज 1 गणित केल्यास 48 दिवस

∴ रोज 6 गणिते केल्यास $\frac{48}{6}$ = 8 दिवस.

आता आणखी वेगळे उदाहरण पाहू.

उदा. ४ : एका मोटारीला 34 कि.मी. जाण्यास 40 मिनिटे लागतात. तर मोटारीचा तांशी वेग काय? मोटारीचा वेग $\frac{2}{3}$ पट केला, तर 272 कि.मी जाण्यास किती वेळ लागेल?

हे गणित हळू हळू, छोट्या भागात सोडवू.

मोटारीचा वेग माहीत हवा. जुना वेग शोधता येईल. त्यावरून नवा वेग काढू.

40 मिनिटांत 34 कि.मी. जाते.

∴ 60 मिनिटांत व कि.मी. जाते असे मानू.

$$\therefore \frac{\text{व}}{60} = \frac{34}{40} \quad \therefore \text{व} = \frac{34 \times \cancel{60}^{3}}{\cancel{40}_2} = \frac{\cancel{34}^{17} \times 3}{\cancel{2}_1} = 51.$$

∴ मोटारीचा जुना वेग ताशी 51 कि.मी. आहे. त्याच्या $\frac{2}{3}$ पट म्हणजे

$$\frac{\cancel{51}^{17}}{1} \times \frac{2}{\cancel{3}_1} = 34.$$

∴ नवा वेग ताशी 34 कि.मी.

आता 34 कि.मी. वेगाने 272 कि.मी. जाण्यास

$$\frac{272}{34} = \frac{\cancel{272}^{136}}{\cancel{34}_{17}} = 8 \text{ तास लागतील.}$$

∴ नव्या वेगाने मोटारीला 272 कि.मी. जाण्यास 8 तास लागतील.

उदा. 5 : एक भिंत बांधण्यास 15 मजुरांना 40 दिवस लागतात. तर तशाच चार भिंती 60 दिवसांत पुऱ्या करण्यास किती मजुर लावावेत?

इथे एकूण चार भिंती बांधायच्या आहेत, तेव्हा या कामाचाच विचार करू.

15 मजुरांना एका भिंतीला 40 दिवस लागतात.

∴ 15 मजुरांना चार भिंतींना 40 X 4 = 160 दिवस लागणार.

∴ 1 मजुराला चार भिंतींना 160 X 15 दिवस.

प मजुरांना चार भिंतींना 60 दिवस असे मानू.

∴ 160 X 15 = 60 X प

$\therefore$ प = $\frac{160 \times 15}{60} = \frac{160}{4} = 40$.

$\therefore$ प = 40 मजुर लावल्यास चार भिंतींचे काम 60 दिवसांत होईल.

सरावासाठी गणिते (11) :

(1) खालील संख्यांच्या जोड्या सम प्रमाणात आहेत की व्यस्त प्रमाणात ते ओळखा.

1) गाडीचा वेग व गाडीने ठराविक प्रवासात घेतलेला वेळ.

2) एका वर्गातील विद्यार्थ्यांची संख्या व सर्वांनी मिळून दिलेली फीची रक्कम.

3) साखरेचे वजन व तिची किंमत.

4) पेरूची संख्या व त्यांची किंमत.

5) एका हॉस्टेलमधील विद्यार्थ्यांची संख्या व ठराविक धान्याचा साठा त्या विद्यार्थ्यांना जितके दिवस पुरेल, त्या दिवसांची संख्या.

6) एक कामगार ठराविक काम करत असताना, त्याच्या रोजच्या कामाच्या तासांची संख्या व काम करण्यासाठी लागणारे दिवस.

(2)

1) आठ घोड्यांना काही हरभरे 112 दिवस पुरतात. सात घोड्यांना तेच हरभरे किती दिवस पुरतील?

2) एक मोटार ताशी 30 कि.मी. वेगाने गेली तर पुणे-सातारा हे अंतर 4 तासात जाते. मोटारीचा वेग दीडपट केला, तर ती तेच अंतर किती तासात जाईल?

3) एक मजूर रोज आठ तास काम करतो, तेव्हा एक घर 12 दिवसात रंगवून होते. तोच मजूर जर रोज दहा तास काम करू लागला तर ते घर किती दिवसात रंगवून होईल?

4) लीला एका तासात 15 गजरे करते व गौरी एका तासात 20 गजरे करते. जे गजरे लीलाने चार तासात केले, ते गौरी किती तासात करेल?

5) दोन टेबलांची किंमत 2400 रुपये आहे. पाच खुर्च्यांची देखील तेवढीच किंमत होते. एकूण 3 टेबले व 12 खुर्च्या घेतल्या, तर काय किंमत होईल?

९.
ल.सा.वि./म.सा.वि.

अनेकदा ल.सा.वि. व म.सा.वि. नावाचे राक्षस शाळेतल्या मुलांना सतावतात. लहानशा दिव्यातून येणाऱ्या भयंकर राक्षसासारखेच भीतिदायक वाटतात. पण त्यांचा अर्थ समजावून घेतला, त्यांचा कुठे वापर करायचा हे शिकलं की दिव्याच्या राक्षसाप्रमाणेच ते आपल्याला वश होतात व उपयोगी पडतात. आधी त्यांचा अर्थ पाहू.

ल.सा.वि. = लघुतम साधारण विभाज्य

म्हणजे लहानात लहान अशी संख्या जी दिलेल्या संख्यांची सामायिक किंवा समान विभाज्य आहे.

विभाज्य म्हणजे काय हे लक्षात आहे का? 12 ही संख्या 4 ची विभाज्य आहे. म्हणजेच 4 ने 12 ला पूर्ण भाग जातो किंवा 12 ही संख्या 4 च्या पाढ्यात येते.

उदाहरणासाठी 12 व 15 यांचा ल.सा.वि. शोधू. 12 व 15 या दोन्हींचे पाढे लिहून, त्या दोन्ही पाढ्यांत येणारी (सामायिक किंवा साधारण विभाज्य) अशी लहानात लहान संख्या काढू.

12, 24, 36, 48, <u>60</u>, 72, 84, ...

15, 30, 45, <u>60</u>, 75, ...

हे पाढे पाहिले की 60 ही लहानात लहान संख्या दोन्ही पाढ्यांत आहे, म्हणून

(12, 15) चा ल.सा.वि. 60 आहे.

6 व 15 चा ल.सा.वि. काढू.

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

15, 30, 45, 60, ...

दोन्ही पाढ्यांत येणारी सर्वात लहान संख्या 30 आहे.

∴ (6, 15) यांचा ल.सा.वि. 30 आहे.

दोन ऐवजी 3 किंवा अधिक संख्यांचाही ल.सा.वि. काढता येतो.

उदा. 6, 12 व 15 यांचा ल.सा.वि. काढू.

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...

15, 30, 45, 60, 75, ...

60 ही लहानात लहान संख्या तीनही पाढ्यांत येते. ∴ 6, 12, 15 यांचा ल.सा.वि. 60 आहे.

6, 12 यांचा ल.सा.वि. काढू.

6, 12, 24, ...

12, 24, 36, ...

हे पाढे पाहून 12 ही सर्वात लहान संख्या 6 व 12 दोघांचीही विभाज्य आहे हे समजले.

∴ (6, 12) यांचा ल.सा.वि. 12 आहे.

लक्षात ठेवा —

दिलेल्या संख्यांचा ल.सा.वि. म्हणजे अशी संख्या, जिला दिलेल्या प्रत्येक संख्येने पूर्ण भाग जातो व या प्रकारची ती सर्वात लहान संख्या आहे.

अर्थात दिलेल्या कुठल्याच संख्येपेक्षा ल.सा.वि. लहान असू शकत नाही. दिलेल्या प्रत्येक संख्येपेक्षा ल.सा.वि. मोठा असतो किंवा दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वात मोठ्या संख्येएवढा असतो.

म.सा.वि. = महत्तम साधारण विभाजक

= सर्वात मोठी संख्या जी दिलेल्या संख्यांची साधारण किंवा सामायिक विभाजक आहे.

विभाजकाला भाजक किंवा अवयव असेही म्हणतात.

∴ म.सा.वि. = दिलेल्या प्रत्येक संख्येचा भाजक असणारी, सर्वात मोठी संख्या.

दिलेल्या संख्येचे सगळे भाजक शोधता येतात ना?

12 चे भाजक (1, 2, 3, 4, 6, 12) आहेत.

18 चे भाजक (1, 2, 3, 6, 9, 18) हे आहेत.

मग दोन्ही याद्यांमध्ये येणारा सर्वात मोठा भाजक 6 आहे.

∴ (12, 18) चा म.सा.वि. 6 आहे.

20 व 50 चा म.सा.वि. काढू.

20 चे भाजक (1, 2, 4, 5, 10, 20)

50 चे भाजक (1, 2, 5, 10, 25, 50)

दोन्ही याद्यांमध्ये येणारा सर्वात मोठा भाजक 10 आहे. म्हणून 20 व 50 चा म.सा.वि. 10 आहे.

दोनहून जास्त संख्यांचाही म.सा.वि. काढता येतो.

20, 25 व 50 यांचा म.सा.वि. काढू.

20 चे भाजक	1, 2, 4, 5, 10, 20
25 चे भाजक	1, 5, 25
50 चे भाजक	1, 2, 5, 10, 25, 50

तीनही संख्यांच्या भाजकांच्या याद्यांमध्ये येणारे भाजक 1 व 5 एवढेच आहेत.

∴ 20, 25 व 50 यांचा म.सा.वि. 5 आहे.

लक्षात ठेवा की **दिलेल्या संख्यांपैकी प्रत्येकीचा भाजक असलेली सर्वात मोठी संख्या म्हणजे त्यांचा म.सा.वि.** हा दिलेल्या कुठल्याच संख्येपेक्षा मोठा असू शकत नाही. दिलेल्या प्रत्येक संख्येपेक्षा लहान असतो किंवा दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वात लहान संख्येएवढा असतो.

उदा. 12 व 36 चा म.सा.वि. काढू.

12 चे भाजक	1, 2, 3, 4, 6, 12
36 चे भाजक	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

दोन्ही याद्यांमध्ये येणारा सर्वात मोठा भाजक 12 आहे.

∴ 12 व 36 यांचा म.सा.वि. 12 आहे.

तसेच 12 व 36 यांचा ल.सा.वि. 36 आहे हे तपासून पहा.

या उदाहरणावरून लक्षात येईल की **दोन संख्यांपैकी लहान संख्येने मोठ्या संख्येला भाग गेला, तर लहान संख्या त्या दोन्हींचा म.सा.वि. असते व मोठी संख्या त्या दोन्हींचा ल.सा.वि. असते.**

ल.सा.वि. मध्ये लघुतम म्हणजे लहानात लहान असा शब्द असला, तरी ल.सा.वि. दिलेल्या संख्यांपेक्षा मोठा किंवा त्यांपैकी सर्वात मोठ्या संख्येएवढा असतो तर म.सा.वि. मध्ये महत्तम म्हणजे मोठ्यात मोठा असा शब्द असला, तरी म.सा.वि. दिलेल्या संख्यांपेक्षा लहान किंवा त्यांपैकी सर्वात लहान संख्येएवढा असतो.

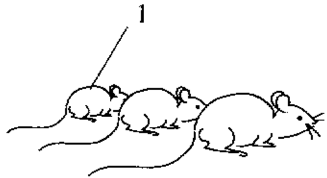
त्यांचे अर्थ लक्षात ठेवण्यासाठी पुढील तुलना पहा.

म.सा.वि. म्हणजे मूषक किंवा उंदीर आहे कारण तो दिलेल्या प्रत्येक संख्येचे सारखे तुकडे करतो. प्रत्येक संख्येचा तो भाजक असतो.

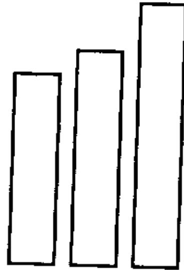
1 ही संख्या प्रत्येक पूर्ण संख्येची भाजक असतेच पण त्याहून मोठा भाजक प्रत्येक संख्येला भागतो का ते महत्त्वाचे असते. सर्वात मोठा उंदीर म्हणजे म.सा.वि. कधी कधी तो 1 हाच असतो. उदाहरणार्थ, 4 व 9 यांचा म.सा.वि. 1 आहे.

म्हणून दिलेल्या संख्यांचे समान भाजक तपासताना सर्वात मोठा सापडणं महत्त्वाचं. उलट दिलेल्या संख्यांचे विभाज्य अनेक असतात. दिलेल्या सर्व संख्यांचा गुणाकार केला, तर तो प्रत्येकीचा विभाज्य किंवा प्रत्येकीच्या पाढ्यात असतोच. शिवाय त्या गुणाकाराच्या पाढ्यातल्या सगळ्या संख्याही मूळ संख्यांच्या पाढ्यात असतातच, त्यामुळे अशा दिलेल्या संख्यांच्या पाढ्यांत येणाऱ्या समान

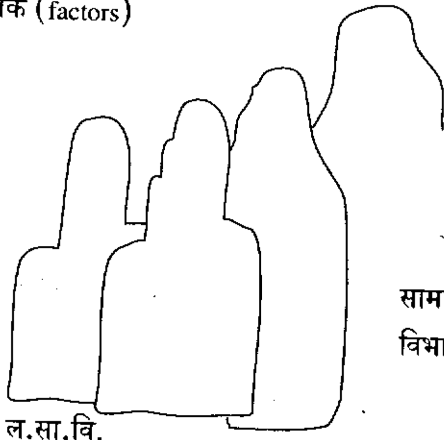
विभाज्यांपैकी सर्वात लहान असा विभाज्य शोधणे महत्त्वाचे असते. ल.सा.वि. हा डोंगरा सारखा असतो. दिलेली प्रत्येक संख्या त्याचे सारखे भाग करू शकते. असा सर्वात लहान डोंगर म्हणजे ल.सा.वि.



सामायिक किंवा कॉमन
विभाजक (factors)



दिलेल्या संख्या



सामायिक किंवा कॉमन
विभाज्य (multiple)

ल.सा.वि.

किंवा, म.सा.वि. व ल.सा.वि. आणि दिलेल्या संख्या यांची तुलना पुढील चित्रावरून ध्यानात येईल.

दिलेल्या संख्यांचे म.सा.वि., ल.सा.वि. काढण्यासाठी त्यांचे गुणक किंवा अवयव पाडावेत. संख्या मोठ्या असल्या, तर त्यांचे पाढे लिहून सामायिक विभाज्य शोधणे कठीण जाईल व सगळेच भाजक लिहून काढणेही त्रासाचे होईल. म्हणून मूळ अवयव पाडून दिलेल्या संख्यांचे म.सा.वि. व ल.सा.वि. शोधू या.



म.सा.वि.   दिलेल्या संख्या   ल.सा.वि.

2, 3, 4, 5, 9 या भाजकांनी दिलेल्या संख्येला भाग जातो का ते तपासता येते ना? पान 139 वरील कसोट्या नीट ध्यानात ठेवा व त्यांचा उपयोग अवयव पाडताना करा.

उदाहरणासाठी 24 व 60 या संख्या घेऊ.

24 = 4 X 6 = 2 X 2 X 2 X 3

60 = 4 X 15 = 2 X 2 X 3 X 5

2, 3, 5 हे मूळ अवयव आहेत. त्यांचे आणखी लहान अवयव पाडता येत नाहीत.

आधी 24 व 60 यांचा ल.सा.वि. काढू. त्या ल.सा.वि.ला 24 ने भाग जातो म्हणून ल.सा.वि.ला 2 ने 3 वेळा व 3 ने भाग जातो म्हणजेच 8 X 3 याने ल.सा.वि.ला भाग जातो.

60 = 2 X 2 X 3 X 5.

इथे 8 ने ल.सा.वि.ला भाग गेला, की 4 ने जाईलच. 3 ने भाग गेला पाहिजे तसेच 60 ने भाग जातो म्हणून 5 नेही भाग जाईल. ∴ 8 X 3 X 5 या संख्येने ल.सा.वि.ला भाग जातो. आता 8 X 3 X 5 या संख्येला 8 X 3 ने व 4 X 3 X 5 ने भाग जातो.

∴ ल.सा.वि. = 8 X 3 X 5 हाच आहे.

हीच कृति इतर संख्यांचा ल.सा.वि. शोधताना करा. संख्यांचे मूळ अवयव पाडा.

या कृतीत येणारा **प्रत्येक मूळ अवयव पहा, तो दिलेल्या संख्यांमध्ये जास्तीत जास्त किती वेळा येतो ते पहा. तितक्या वेळा तो ल.सा.वि.च्या अवयवांतही येणार. मग अशा सर्व मूळ अवयवांना तेवढ्या वेळा घेऊन गुणाकार करा. तो गुणाकार म्हणजेच दिलेल्या संख्यांचा ल.सा.वि.**

उदा. 1 : (36, 54) चा ल.सा.वि. काढा.

36 = 4 X 9 = 2 X 2 X 3 X 3

54 = 6 X 9 = 2 X 3 X 3 X 3

2 व 3 हे मूळ अवयव इथे येतात.

2 हा जास्तीत जास्त 2 वेळा (36 मध्ये) येतो.

3 हा जास्तीत जास्त 3 वेळा (54 मध्ये) येतो.

∴ ल.सा.वि. = (2 X 2) X (3 X 3 X 3) = 108.

(108 ला 36 व 54 दोघांनीही भाग जातो व त्याहून लहान संख्येला 36 व 54 दोघांनीही भाग जात नाही.)

उदा. 2 : 18 व 36 यांचा ल.सा.वि. काढा.

18 = 2 X 3 X 3

36 = 2 X 2 X 3 X 3

ल.सा.वि. = (2 X 2) X (3 X 3) = 36.

इथे 18 ने 36 ला भाग जातो व 36 हीच लहानात लहान संख्या जिला 18 व 36 दोन्हींनी भाग जातो.

आता अवयव पाडून म.सा.वि. शोधण्याची रीत पाहू.

24 व 60 यांचे पुन्हा मूळ अवयव पाडू.

24 = $\underline{2}$ X $\underline{2}$ X 2 X $\underline{3}$

60 = $\underline{2}$ X $\underline{2}$ X $\underline{3}$ X 5.

इथे 2 हा अवयव 24 व 60 दोघांमध्येही कमीत कमी 2 वेळा येतो व 3 हा अवयव दोघांमध्ये एकेकदा येतो.

∴ 24 व 60 यांचे कॉमन भाजक हे 2 व 3 यांचा उपयोग करून मिळतील. 2 X 2 X 3 हा सर्वात मोठा सामायिक विभाजक आहे. कारण कुठल्याही सामायिक विभाजकात 2 हा 0 वेळा, 1 वेळा किंवा 2 वेळा येऊ शकतो तर 3 हा 0 वेळा किंवा 1 वेळा येऊ शकतो. आता मोठ्यात मोठा समान भाजक म्हणजे 2 X 2 X 3 असा होतो. 1, 2, 4, 6 हे देखील कॉमन भाजक आहेत पण ते 2 X 2 X 3 = 12 पेक्षा लहान आहेत.

म.सा.वि. शोधण्यासाठी दिलेल्या प्रत्येक संख्येचे मूळ अवयव पाडा. प्रत्येक संख्येत येणारा मूळ अवयव कमीत कमी किती वेळा येतो, तितके वेळा घेऊन अशा सर्व अवयवांचा गुणाकार करा. प्रत्येक संख्येच्या अवयवात एखादा मूळ अवयव आला, की त्याच्या खाली रेघ मारून त्याला वेगळा काढा म्हणजे असे वेगळे काढलेले अवयव गोळा करून त्यांचा गुणाकार करून म.सा.वि. मिळेल.

उदा. 1 : 36 व 54 चा म.सा.वि. काढा.

36 = 4 X 9 = $\underline{2}$ X 2 X $\underline{3}$ X $\underline{3}$

54 = 6 X 9 = $\underline{2}$ X $\underline{3}$ X $\underline{3}$ X 3

म.सा.वि. = 2 X 3 X 3 = 18.

36 व 54 दोघांनाही पूर्ण भागणारा 18 हा सर्वात मोठा भाजक आहे.

उदा. 2 : 120, 24, 36 यांचा म.सा.वि. काढा.

24 = 2 X 2 X 2 X 3

36 = 2 X 2 X 3 X 3

120 = 2 X 2 X 2 X 3 X 5

म.सा.वि. = 2 X 2 X 3 = 12.

24, 36 व 120 यापैकी प्रत्येकाला पूर्ण भागणारा सर्वात मोठा भाजक 12 आहे.

उदा. 3 : 24, 8, 40 यांचा म.सा.वि. काढा.

8 = 2 X 2 X 2

24 = 2 X 2 X 2 X 3

40 = 2 X 2 X 2 X 5

म.सा.वि. = 2 X 2 X 2 = 8

8 हा 8, 24 व 40 यापैकी प्रत्येकाला पूर्ण भागणारा सर्वात मोठा भाजक आहे.

सरावासाठी खालील संख्यांचे ल.सा.वि. व म.सा.वि. काढा (12) :

1) 15, 25, 60

2) 24, 96

3) 42, 25, 1050

4) 12, 60, 108

5) 54, 90.

म.सा.वि. व ल.सा.वि. यांचे उपयोग वेगवेगळ्या गणितात होतात. विशेष करून ज्या ठिकाणी दिलेल्या संख्यांचे भाजक किंवा विभाज्य हवे असतात, तिथे यांचा उपयोग होतो. मात्र गणित नीट वाचून दिलेल्या संख्यांपासून काय माहिती हवी ते समजावून घ्या. काही गणिते पाहू या.

उदा. 1 : एका दुकानदाराकडे निळे कापड 105 मीटर, लाल कापड 60 मीटर व पांढरे कापड 120 मीटर आहे. त्याला प्रत्येक कापडाचे सारख्या लांबीचे तुकडे करायचे आहेत. जास्तीत जास्तीत किती लांबीचे तुकडे करता येतील?

दिलेल्या कापडांच्या लांबीचे सारखे तुकडे करायचे म्हणजे प्रत्येक लांबीचा भाजक (उंदीर) हवा. असा मोठ्यात मोठा भाजक म्हणजे 120, 60 व 105 यांचा म.सा.वि. हवा. तो काढू.

60 = 2 X 2 X 3 X 5

105 = 3 X 5 X 7

120 = 2 X 2 X 2 X 3 X 5.

म.सा.वि. = 15.

15 ने 60, 105 व 120, यापैकी प्रत्येकाला भाग जातो व 15 ही अशी सर्वात मोठी संख्या आहे.

∴ प्रत्येक कापडाचे 15 मीटरचे तुकडे करता येतील.

उदा. 2 : शाळेतील मुलांमध्ये 20 मुलांच्या 30 मुलांच्या किंवा 50 मुलांच्या अशा रांगा केल्या, तर एकही मुलगा शिल्लक रहात नाही, तर शाळेत कमीत कमी किती मुलं आहेत?

शाळेतील मुलांच्या संख्येला 20 ने, 30 ने व 50 ने पूर्ण भाग जातो म्हणजे ती संख्या 20, 30 व 50 ची विभाज्य (डोंगर) आहे, व या प्रकारची सर्वात लहान संख्या म्हणजे ल.सा.वि. शोधायचा.

20 = (2 X 2) X 5

30 = 2 X (3) X 5

50 = 2 X (5 X 5)

ल.सा.वि. = 2 X 2 X 3 X 5 X 5 = 300

∴ शाळेत कमीत कमी 300 मुले असतील. (20, 30 व 50 यांनी भाग जाईल अशी लहानात लहान संख्या = 300.)

उदा. 3 : एका टोपलीत काही फुले आहेत. 20 फुलांच्या 15 फुलांच्या किंवा 25 फुलांच्या सगळ्या माळा केल्या तर प्रत्येक वेळी 7 फुले शिल्लक रहातात. तर टोपलीत कमीत कमी किती फुले आहेत?

टोपलीतून 7 फुले काढून ठेवली तर उरलेल्या फुलांच्या संख्येला 20, 15 व 25 ने पूर्ण भाग जातो (डोंगर). अशी लहानात लहान संख्या म्हणजे ल.सा.वि. हवा.

15 = (3) X 5

20 = (2 X 2) X 5

25 = (5 X 5)

∴ ल.सा.वि. = 2 X 2 X 3 X 5 X 5 = 300

7 वजा केल्यावर उरलेली फुले कमीत कमी 300.

∴ टोपलीत कमीत कमी 307 फुले आहेत.

(7 वजा केल्यावर टोपलीत 600 किंवा 900 फुले उरली तरी 20, 15 किंवा 25 फुलांच्या माळा करून संपतील पण 600, 900 ह्या संख्या 300 पेक्षा मोठ्या आहेत.)

पुन्हा लक्षात ठेवा म.सा.वि. हा दिलेल्या प्रत्येक संख्येचा भाजक व अशी मोठ्यात मोठी संख्या असते. तो कमीत कमी 1 व जास्तीत जास्त दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वात लहान संख्येएवढा असतो. ल.सा.वि.ला दिलेल्या प्रत्येक संख्येने भाग जातो व अशा प्रकारची ती लहानात लहान संख्या असते. ल.सा.वि. कमीत कमी दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वात मोठ्या संख्येएवढा व जास्तीत जास्त दिलेल्या संख्यांच्या गुणाकाराएवढा असतो.

समजा $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ या दिलेल्या संख्या आहेत. (चार ऐवजी 2, 3, किंवा 5 संख्या चालतील.)

तर $1 \leq$ (म.सा.वि.) $\leq m_1$ आणि

$m_4 \leq$ (ल.सा.वि.) $\leq m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4$

असे लिहिता येईल.

सरावाची गणिते (13) :

1) सुरेशजवळ 432 लाल गोट्या, 612 पांढऱ्या गोट्या व 900 हिरव्या गोट्या आहेत. त्याला प्रत्येक रंगाच्या गोट्यांची पाकिटे भरायची आहेत. प्रत्येक पाकिटात गोट्यांची एकच संख्या हवी. तर प्रत्येक पाकिटात जास्तीत जास्त किती गोट्या भरता येतील?

2) मीनाजवळ शेवंतीची काही फुले आहेत. 12 फुलांच्या, 16 फुलांच्या किंवा 18 फुलांच्या माळा केल्या, तर सगळी फुले संपतात. तिच्याजवळ कमीत कमी किती फुले आहेत?

3) एका टोपलीतील संत्र्यांचे 25, 30 किंवा 40 चे ढीग केले, तर प्रत्येक वेळी 5 संत्री उरतात. टोपलीत कमीत कमी किती संत्री आहेत?

4) सुधाकडे 240 निळे मणी, 540 पांढरे मणी व 225 लाल मणी आहेत. प्रत्येक रंगाच्या एकाच लांबीच्या माळा करायच्या आहेत. जास्तीत जास्त किती मणी प्रत्येक माळेत घेता येतील?

5) एका शाळेत पाचवीत 150 मुले, सहावीत 120 मुले व सातवीत 180 मुले आहेत. प्रत्येक वर्गातून सारख्या मुलांच्या रांगा करायच्या आहेत. जास्तीत जास्त किती मुले प्रत्येक रांगेत घेता येतील?

6) सीमाजवळ काही मोती आहेत. तिने 28, 42 किंवा 35 मोत्यांच्या माळा केल्या तर प्रत्येक वेळी 8 मोती उरतात. तिच्याजवळ कमीत कमी किती मोती आहेत?

7) एका शाळेत एकाच संख्येच्या विद्यार्थ्यांच्या रांगा करायच्या आहेत. 24, 36 किंवा 30 मुलांच्या रांगा करता येतात तर शाळेत कमीत कमी किती मुले आहेत?

10.
सातवीसाठी जादा पुरवणी

ल.सा.वि./म.सा.वि.

या भागात ल.सा.वि. व म.सा.वि. बद्दल आणखी काही माहिती व युक्त्या आपण पहाणार आहोत.

दोन संख्यांचा म.सा.वि., अवयव न पाडता शोधता येतो.

त्यासाठी भागाकाराची क्रिया वारंवार करावी लागते. पण एकंदर रीत सोपी आहे. त्यासाठी प्रथम हे लक्षात घ्या की दोन संख्यांपैकी एकीने दुसरीला पूर्ण भाग जात असेल, तर भाजक संख्या हाच दोघांचा म.सा.वि. असतो. म.सा.वि. हा त्यापैकी कुठल्याच संख्येपेक्षा जास्त असू शकत नाही. उदाहरणार्थ, 12 व 36 या दोन संख्या पहा. 12 ने 36 ला भाग जातो. म्हणून दोघींचा मोठ्यात मोठा सामायिक विभाजक (कॉमन फॅक्टर) 12 आहे. या गोष्टीचा इथे उपयोग करणार आहोत. उदाहरणार्थ, 18 व 42 या संख्यांचा म.सा.वि. काढू. A, B या दोन संख्यांचा म.सा.वि. (A, B) असा लिहितात. प्रथम लहान संख्येने मोठीला भागावे व बाकी किती आहे ते पहावे.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 18\overline{)42} \\ -36 \\ \hline 6 \end{array}$$

∴ बाकी 6 आहे.

आता (18, 42) = (6, 18)

म्हणजेच 18 व 42 यांचा म.सा.वि. = 6 व 18 यांचा म.सा.वि. पुन्हा 6 ने 18 ला भागू या.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6\overline{)18} \\ -18 \\ \hline 00 \end{array}$$

आता 18 ला 6 ने भाग जातो.

∴ 6 व 18 यांचा म.सा.वि. 6 आहे.

∴ 18 व 42 यांचा म.सा.वि. 6 आहे. हेच पुढीलप्रमाणे लिहितात.

(8, 42) = (6, 18) = 6.

मूळ अवयव पाडून तेच उत्तर येते ना ते तपासून पहा. आणखी एक उदाहरण पाहू.

72 व 119 यांचा म.सा.वि. शोधू या म्हणजेच (72, 119) शोधू या.

$72 \overline{) 119}$ (1), -72, 47 — इथे बाकी 47 आहे.

∴ (119, 72) = (72, 47)

पुन्हा 47 ने 72 ला भागू.

$47 \overline{) 72}$ (1), -47, 25 ∴ (47, 72) = (25, 47)

$25 \overline{) 47}$ (1), -25, 22 ∴ (25, 47) = (22, 25)

$22 \overline{) 25}$ (1), -22, 3 ∴ (22, 25) = (3, 22)

$3 \overline{) 22}$ (7), -21, 01 ∴ (3, 22) = (1, 3)

1 ने 3 ला पूर्ण भाग जातो. ∴ (1, 3) = 1.

∴ (72, 119) = (72, 47) = (25, 47) = (22, 25) = (3, 22) = (1, 3) = 1.

इथे जास्त वेळा भागाकार करावा लागला पण दिलेल्या संख्यांचे अवयव पाडावे लागले नाहीत. 72 व 119 यांचे मूळ अवयव पाडून म.सा.वि. 1 आहे ते तपासून पहा.

आणखी एक उदाहरण पहा.

(119, 154) शोधा.

$119 \overline{) 154}$ (1), -119, 35 ∴ (119, 154) = (35, 119)

$35 \overline{) 119}$ (1), -105, 14 ∴ (35, 119) = (14, 35)

$14 \overline{) 35}$ (2), -28, 7 ∴ (14, 35) = (7, 14)

7 ने 14 ला भाग जातो. ∴ (7, 14) = 7.

(119, 154) = (35, 119) = (14, 35) = (7, 14) = 7.

दोन संख्या दिल्या असल्या व त्यांचे अवयव शोधणे त्रासाचे असले, तर या भागाकार पद्धतीने त्यांचा म.सा.वि. काढता येतो. ल.सा.वि. साठी तशी रीत नाही. पण दुसरी एक युक्ति आहे. जर A व B या दोन संख्या असतील व M, L हे त्यांचे म.सा.वि., ल.सा.वि. असतील, तर एक सूत्र असे आहे —

A X B = M X L.

आता या समीकरणात A, B व M हे माहित असतील, तर त्यांच्या किंमती घालून L ची किंमत काढता येईल.

उदाहरणार्थ, 308 व 385 चे म.सा.वि. व ल.सा.वि. काढू.

$308 \overline{) 385}$ (1), -308, 77

$77 \overline{) 308}$ (4), -308, 000 ∴ (308, 385) = (77, 308)

∴ (77, 308) = 77

∴ 308 व 385 यांचा म.सा.वि. 77 आहे.

L हा त्यांचा ल.सा.वि. असेल, तर

$$77 X L = 308 X 385$$
$$= 4 X 77 X 5 X 77$$

$\therefore \quad L = \frac{4 X 5 X 77 X \cancel{77}}{\cancel{77}}$

$\therefore \quad L = 20 X 77 = 1540.$

सरावाची गणिते (14) :

खालील संख्यांचे म.सा.वि. व ल.सा.वि. भागाकार पद्धतीचा उपयोग करून शोधा.

1) 48, 68

2) 172, 120

3) 120, 195

4) 252, 288

5) 162, 135

6) 120, 168.

बीजगणित, अपूर्णांक, इत्यादि

व्यवहारी अपूर्णांक व अक्षरांच्या पदावल्या, यांच्या बेरजा वजाबाक्या करायला तुम्ही शिकला आहात. आता त्यांचे गुणाकार, भागाकार हे देखील शिकू या. एका दशांश अपूर्णांकाने दुसऱ्या दशांश अपूर्णांकाला गुणायला किंवा भागायला आपण शिकलो आहोत. व्यवहारी अपूर्णांकांचा किंवा परिमेय संख्यांचा गुणाकार व भागाकार कसा करतात ते पहा. $\frac{4}{7} X \frac{2}{3}$ हा गुणाकार करताना दोन्ही अंशांचा व दोन्ही छेदांचा असे गुणाकार करून, गुणाकाराचा अपूर्णांक मिळतो. म्हणजेच,

$$\frac{4}{7} X \frac{2}{3} = \frac{4 X 2}{7 X 3} = \frac{8}{21},$$

हे आपण गुणोत्तरावरची गणिते करताना उपयोगात आणले आहे.

$\frac{4}{7} \div \frac{2}{3}$ म्हणजे इथे $\frac{4}{7}$ ला $\frac{2}{3}$ ने भागायचे आहे. तर $\frac{2}{3}$ चा व्यस्त (उलटा) घेऊन त्याने $\frac{4}{7}$ ला गुणायचे म्हणजे $\frac{4}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{7} X \frac{3}{2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$.

इथे $\frac{\cancel{4}^{2}}{7} X \frac{3}{\cancel{2}_{1}} = \frac{6}{7}$ असेही करता येते.

लक्षात ठेवा —

व्यवहारी अपूर्णांकाने भागणे म्हणजेच त्याचा व्यस्त (उलटा) करून त्याने गुणणे. शिवाय, मिळणाऱ्या अपूर्णांकाचा अंश व छेद प्रथम गुणाकाराच्या पद्धतीत लिहून, अंश व छेद यातील कॉमन फॅक्टर किंवा सामायिक अवयव शोधून त्यांनी अंश व छेद दोघांना भागले की अपूर्णांकाला छोटे रूप देणे सोपे जाते. तसेच, पदावली सोडवताना प्रथम गुणाकार व भागाकार, नंतर बेरीज व वजाबाकी करावी हा नियम लक्षात ठेवा.

उदा. 1 : $\frac{7}{8} X \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9} \div \frac{2}{3}$ ही पदावली सोडवा.

प्रथम गुणाकार व भागाकार करू.

$$\frac{7}{8} X \frac{4}{3} = \frac{7}{\cancel{8}_{2}} X \frac{\cancel{4}^{1}}{3} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{5}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{_{3}\cancel{9}} X \frac{\cancel{3}^{1}}{2} = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ दिलेली पदावली $= \frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$. सर्व अपूर्णांकांचा 6 हा समान छेद करता येतो.

म्हणून दिलेली पदावली $= \frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

$= \frac{7}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1} = 1.$

∴ दिलेली पदावली = $\frac{1}{1}$ = 1 हे उत्तर.

उदा. 2 : $\frac{17}{25} \div \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \div \frac{2}{3} + \frac{7}{10} X \frac{1}{3}$

प्रथम गुणाकार व भागाकार करू.

$\frac{17}{25} \div \frac{3}{5} = \frac{17}{\cancel{25}_5} X \frac{\cancel{5}^1}{3} = \frac{17}{15}$

$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{9}_3} X \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}_1} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{10} X \frac{1}{3} = \frac{7}{30}$

∴ दिलेली पदावली = $\frac{17}{15} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{7}{30}$

इथे सर्व अपूर्णांकांना 30 हा समान छेद देऊ.

∴ दिलेली पदावली = $\frac{34}{30} + \frac{15}{30} - \frac{20}{30} + \frac{7}{30} = \frac{34 + 15 - 20 + 7}{30}$

$= \frac{\cancel{36}^6}{\cancel{30}_5} = \frac{6}{5}$ हे उत्तर.

सरावाची गणिते (15) :

खालील पदावल्या सोडवा.

1) $\frac{7}{18} X \frac{3}{2} - \frac{5}{9} \div \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \div \frac{2}{3}$

2) $\frac{16}{20} \div \frac{3}{5} - \frac{18}{5} X \frac{1}{3} - \frac{7}{8} X \frac{6}{5}$

3) $5 + \frac{9}{14} \div \frac{3}{7} - \frac{5}{21} X \frac{3}{2}$

4) $\frac{61}{60} - \frac{5}{6} X \frac{2}{5} - \frac{7}{6} \div \frac{2}{3}$

5) $\frac{21}{16} \div \frac{3}{4} - 2 + \frac{1}{2} \div 2$

अधिक व उणे संख्यांचा किंवा धन व ऋण संख्यांचा गुणाकार करताना खालील नियम विसरू नका.

$(+) X (+) = (+)$ $\qquad$ $(-) X (+) = (-)$

$(+) X (-) = (-)$ $\qquad$ $(-) X (-) = (+)$

आता अक्षरांचा व अक्षरे वापरून केलेल्या पदावल्यांचा गुणाकार कसा करायचा पाहू या.

m X m हा गुणाकार कसा करावा? m म्हणजे नक्की कोणती संख्या हे माहीत नाही. 4 X 4 = 16, 7 X 7 = 49 हे तुम्हाला माहीत आहे. आता $m X m = m^2$ असे लिहितात. m^2 म्हणजे m दोन वेळा घेऊन गुणाकार करणे.

तसेच $m X m X m = m^3$ असे लिहितात. इथे m तीन वेळा घेऊन त्यांचा गुणाकार करत आहोत.

$a X a X a X a = a^4$, $3 X 3 X 3 X 3 = 81 = 3^4$ असेही लिहिता येते.

a^4 या संख्येत a हा पाया व 4 हा घातांक आहे असे म्हणतात.

क^7 = क X क X क X क X क X क X क, इथे क हा पाया, 7 हा घातांक आहे. घातांकाच्या पदांचे सोपे नियम पाहू.

क^2 X क^3 = क X क X क X क X क = क^5

तसेच $\quad a^3 X a^4 = a X a X a X a X a X a X a = a^7$

यावरून लक्षात येईल की m, n हे धन पूर्णांक असतील, तर

$a^m X a^n = a^{m+n}$.

मात्र a^m, a^n या दोन्ही पदांत a हा समान पाया आहे हे ध्यानात असू द्या.

a^{-3} याचा अर्थ $\frac{1}{a^3}$ असा आहे. म्हणजेच घातांक ऋण पूर्णांक असेल, तर त्याचा अर्थ, या नियमाप्रमाणे करायचा.

उदा. $m^{-4} = \frac{1}{m^4}$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

आता धन व ऋण घातांकांच्या, एकाच पायाच्या पदांचा गुणाकार पहा.

$$3^4 X 3^{-2} = \frac{3^4}{3^2} = \frac{\cancel{3} X \cancel{3} X 3 X 3}{\cancel{3} X \cancel{3}} = 3^{4-2}.$$

तसेच $$5^4 X 5^{-1} = \frac{5^4}{5^1} = \frac{\cancel{5} X 5 X 5 X 5}{\cancel{5}} = 5^3 = 5^{4-1}$$

$$a^3 X a^{-5} = \frac{\cancel{a} X \cancel{a} X \cancel{a}}{\cancel{a} X \cancel{a} X \cancel{a} X a X a} = = a^{-2} = a^{3-5}.$$

यावरून खालील नियम ध्यानात येईल.

$$a^m X a^{-n} = a^{m-n}.$$

किंवा वरील दोन्ही नियम एकत्र करून असेही म्हणता येईल की, m, n हे धन किंवा ऋण पूर्णांक असतील, तर

$$a^m X a^n = a^{m+n}.$$

घातांकाची थोडी उदाहरणे पाहू.

उदा. 1 : $\frac{5^4}{3^2} X 6^2 X 5^{-2}$ या पदावलीस सोपे रूप द्या. 6 = 3 X 2 हे ध्यानात घ्या.

$$\frac{5^4}{3^2} X 6^2 X 5^{-2} = 5^4 X 3^{-2} X (3 X 2)^2 X 5^{-2}$$

$$= 5^{4-2} X 3^{-2} X 3^2 X 2^2 = 5^2 X 3^{-2+2} X 2^2$$

$$= 5^2 X 2^2 = (5 X 2)^2 = 10^2 = 100.$$

हेच गणित खालील प्रमाणे देखील करता येईल.

$$\frac{5^4}{3^2} X 6^2 X 5^{-2} = \frac{5^4 X 3^2 X 2^2}{3^2 X 5^2}$$

$$= \frac{5^4}{5^2} X \frac{3^2}{3^2} X 2^2 = 5^2 X 2^2 = 10^2 = 100.$$

उदा. 2 : $\left(\frac{2}{5}\right)^4 X \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{5^{-2}}$ हे ध्यानात घेऊ.

$$\therefore \left(\frac{2}{5}\right)^4 X \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{2^4}{5^4} X \frac{2^{-2}}{5^{-2}} = \frac{2^{4-2}}{5^{4-2}} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}.$$

हेच गणित, $\frac{2}{5} = t$ असे मानून

$\left(\frac{2}{5}\right)^4 X \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = t^4 X t^{-2} = t^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2}$ असेही करता येईल.

सरावासाठी गणिते (16) :

खालील पदांना सोपे रूप द्या.

1) $(-3)^6 X (-3)^{-3}$

2) $\frac{4^2}{5^3} X \frac{10^2}{4}$

3) $(2m)^5 X (4m)^{-2}$

4) $(-5m)^4 X (2m)^{-3}$

5) $(3a)^4 X (-6a)^{-2}$

आता अक्षरांच्या पदावल्यांचा गुणाकार, कंस घालणे व सोडवणे हे पाहू.

कंसातील पदावली ही एकच संख्या आहे असे मानावे. **एखाद्या कंसाला एका संख्येने गुणणे म्हणजे कंसातील प्रत्येक पदाला त्या संख्येने गुणणे होय.**

उदाहरणार्थ $4 X (10 + 3) = 4 X 10 + 4 X 3$.

तसेच $7 X (15 - 6) = 7 X 15 - 7 X 6$.

$4 X (10 + 3)$ हेच $4(10 + 3)$ असेही लिहितात.

कंसाला एखादे पद किंवा दुसरा कंस चिकटलेला लिहिला तर त्याचा अर्थ त्या पदाने किंवा कंसाने पहिल्या कंसाला गुणावे. जसे

$7(15 - 6) = 7 X (17 - 6)$,

$(18 - 10)(15 - 6) = (18 - 10) X (15 - 6)$.

हेच नियम अक्षरांच्या पदावल्यांनाही लागू आहेत.

$4 X (5x - 3) = 4 X 5x - 4 X 3 = 20x - 12$,

$3a(8m + 5) = 3a X 8m + 3a X 5 = 24am + 15a$,

$9x(2x - y + 3) = 9x X 2x - 9x X y + 9x X 3$,

$= 18x^2 - 9xy + 27x$,

तसेच $(-2a) X (a - 5) = (-2a) X a - (-2a) X 5 = -2a^2 + 10a$

आता दोन कंसांचा गुणाकार कसा करायचा ते पाहू.

$(3x + 4)(2x - 5)$ हे सोडवू.

इथे प्रथम एक कंस सोडवू त्यावेळी दुसरा कंस हा जसाच्या तसा, एका अक्षराप्रमाणे ठेवू.

$(3x + 4)(2x - 5) = (3x + 4) X 2x - (3x + 4) X (5)$

$= 3x X 2x + 4 X 2x - 3x X 5 - 4 X 5$

$= 6x^2 + 8x - 15x - 20$

$= 6x^2 - 7x - 20$.

हेच खालील प्रमाणेही सोडवता येईल.

$(3x + 4)(2x - 5) = 3x(2x - 5) + 4(2x - 5)$

$= 3x X 2x - 3x X 5 + 4 X 2x - 4 X 5$

$= 6x^2 - 15x + 8x - 20$

$= 6x^2 - 7x - 20$.

सरावाची गणिते (17) :

खालील कंस सोडवा.

1) $(4x + 1)(3x - 4)$

2) $(3a - 5)(3a - 5)$

3) $(m + n)(m + n)$

4) $(7b - 3)(7b - 3)$

5) $4a(5a + 3) - 6a(a - 2) + 11a + 10$

6) $(6a - 7)(a + 3) - 5a(6 - 2a) + 18a + 12$

7) $(5y + 7)(2y - 11) + 8y(10 - 3y) + 45$

8) $(5k - 4)(3k - 7) + 2k(2k + 5) - 13$

9) $16 - 3x(15x - 8) + (x + 4)(x - 4)$

10) $28 + 5y(7y - 3) + (y + 5)(2y - 5)$.

11.

गुणोत्तर प्रमाण, भागीदारी, सरळ व्याज, इत्यादि

गुणोत्तर प्रमाणाचा उपयोग करू आपण अनेक प्रकारची गणिते केली. पण त्या वेळी दोनच संख्यांचे गुणोत्तर विचारात घेत होतो. आता तीन किंवा त्यापेक्षाही जास्त संख्यांचे गुणोत्तर कसे असते ते पाहू. उदाहरणार्थ, रमेश, मीना व आनंद यांचे गुण 3:4:5 या प्रमाणात आहेत याचा अर्थ रमेश व मीना यांचे गुण 3:4 या प्रमाणात व मीना व आनंद यांचे गुण 4:5 या प्रमाणात आहेत असा असतो. या ठिकाणी रमेशचे गुण 3ग असले तर मीनाचे 4ग, आनंदचे 5ग असतात. या तीन संख्या 3ग, 4ग, 5ग अशा लिहिता येतात. ग ची किंमत काहीही असू शकते मात्र ती शून्य नसते. म्हणून

$$\frac{\text{रमेशचे गुण}}{\text{मीनाचे गुण}} = \frac{3}{4}, \frac{\text{मीनाचे गुण}}{\text{आनंदचे गुण}} = \frac{4}{5}$$ असे मिळते.

ग = 10 असेल तर त्या तिघांचे गुण 30, 40, 50 असे असतात.

ग = 12 असेल तर त्यांचे गुण 36, 48, 60 असे असतात.

तीन संख्यांचे गुणोत्तर व शिवाय आणखी काही माहिती मिळाली, तर त्या संख्या शोधता येतात. कसे ते पाहू या.

उदा. 1 : शेळी, गाय व घोडा यांचा खर्च 1:5:7 या प्रमाणात आहे. या तीनही जनावरांचा खर्च मिळून दरमहा 910 रुपये असेल, तर गायीचा दरमहा खर्च किती?

शेळी, गाय व घोडा यांचा खर्च 1:5:7 या प्रमाणात आहे, म्हणून त्यांचे खर्च 1.k = k, 5k, 7k आहेत असे मानू.

मग तिघांचा मिळून खर्च $k + 5k + 7k = 13k$ आहे. तिघांचा मिळून खर्च 910 रुपये आहे.

$\therefore 13k = 910$

$\therefore k = \frac{910}{13} = 70$

∴ गायीचा खर्च = 5k = 350 रुपये आहे.

उदा. 2 : एका वर्गात मुले व मुली यांचे गुणोत्तर 5:3 आहे. मुलांची संख्या मुलींच्या संख्येपेक्षा 8 ने जास्त आहे. तर किती मुले व किती मुली आहेत?

मुले : मुली = 5:3

∴ मुले = 5a, मुली = 3a आहेत असे मानू.

मुलांची संख्या - मुलींची संख्या = 5a - 3a = 2a = 8

$\therefore 2a = 8$

$\therefore a = 4$

∴ मुलांची संख्या = 5a = 5 X 4 = 20

व मुलींची संख्या = 3a = 3 X 4 = 12.

या प्रकारच्या गणितात एक अक्षर वापरून दिलेल्या संख्या लिहितात. मग दिलेल्या माहितीवरून, त्या अक्षराचा उपयोग करून समीकरण मांडतात व ते सोडवून अक्षराची किंमत काढतात. मग प्रत्येक संख्या मिळू शकते.

उदा. 1 : एक दुकान उघडताना सोहन, मोहन व रोहन यांनी अनुक्रमे 2000 रुपये, 3000 रुपये व 5000 रुपये असे भांडवल घातले. पहिल्या वर्षी 3200 रुपये नफा झाला. प्रत्येकाला किती रुपये नफा मिळाला?

ज्या प्रमाणात भांडवल असेल त्या प्रमाणात नफा किंवा तोटा होतो. तिघांच्या भांडवलांचे गुणोत्तर 2000:3000:5000 आहे. म्हणजेच 2:3:5 असे आहे. (इथे

तीनही संख्यांना 1000 ने भागले तरी गुणोत्तर बदलत नाही.)

आता त्यांच्या नफ्यांचे गुणोत्तर ही 2:3:5 आहे.

∴ सोहनचा नफा = 2प

मोहनचा नफा = 3प

रोहनचा नफा = 5प मानू.

तिघांचा नफा मिळून 3200 आहे.

∴ 2प + 3प + 5प = 10प = 3200

प = 320

∴ सोहनचा नफा = 2प = 2 X 320 = 640 रुपये.

मोहनचा नफा = 3प = 3 X 320 = 960 रुपये.

रोहनचा नफा = 5प = 5 X 320 = 1600 रुपये.

उदा. 4 : अच्युत, केशव व नारायण यांनी अनुक्रमे 2500, 3000 व 4000 रुपयांचे भांडवल घालून वर्तमानपत्रे व मासिके यांचे दुकान उघडले. अच्युतने दुकान चालवले म्हणून त्याला दरमहा 300 रुपये द्यायचे ठरले. पहिल्या महिन्यात 1250 रुपये नफा झाला. तर तो तिघांनी कसा वाटून घ्यावा?

प्रथम अच्युतचा पगार 300 रुपये वजा केला की नफा किती उरतो ते पाहू. 1250 - 300 = 950 रुपये नफा तिघांनी मिळून वाटून घ्यायचा आहे. तो भांडवलाच्या प्रमाणात म्हणजे 2500:3000:4000 या प्रमाणात म्हणजेच (100 ने भागून) 25:30:40 या प्रमाणात किंवा (परत 5 ने भागून) 5:6:8 या प्रमाणात आहे. 5, 6 व 8 या तिघांनाही भागणारा 1 च्या व्यतिरिक्त भाजक नाही. म्हणून 5:6:8 हे गुणोत्तर आणखी सोपे करता येत नाही.

आता त्यांचा नफा 5p, 6p व 8p असा मानू.

$\therefore 5p + 6p + 8p = 19p = 950$

$\therefore p = \frac{950}{19} = 50$

∴ अच्युतला नफ्याचा 5p = 250 रुपये भाग,

केशवला 6p = 6 X 50 = 300 रुपये

नारायणला 8p = 8 X 50 = 400 रुपये.

शिवाय अच्युतला 300 रुपये दुकान चालवण्याचा पगार.

∴ अच्युतला एकूण 300 + 250 = 550 रुपये, केशवला 300 रुपये व नारायणला 400 रुपये महिना अखेरीस मिळावेत.

सरावासाठी गणिते (18) :

1) राम व शाम यांच्याकडे 8:5 या प्रमाणात रुपये आहेत. रामजवळ शामपेक्षा 84 रुपये जास्त असले, तर प्रत्येकाजवळ किती रुपये आहेत?

2) माया, जया व सोनिया यांनी मिळून खेळण्यांचे दुकान काढले. त्यांचे भांडवल अनुक्रमे 3500 रुपये, 2000 रुपये व 2500 रुपये आहे. दुकान सोनियाच्या घरात असल्यामुळे दरमहा नफ्यातून तिला 200 रुपये देण्याचे ठरले. पहिल्या महिन्यात 2600 रुपये नफा झाला. तर तो जया, माया व सोनिया यांनी कसा वाटून घ्यावा?

3) मोहन व राकेशने भागीदारीत दुकान चालू केले. मोहनने 5000 रुपये तर राकेशने 6500 रुपये भांडवल घातले. दुकान मोहनच्या जागेत आहे म्हणून त्याला दरमहा 75 रुपये भाडे द्यायचे ठरले. वर्षा अखेरीला भांडवल बाजूला काढल्यावर 7800 रुपये उरले. ते कसे वाटायचे?

4) गोविंदा व महादू यांनी मोठ्या मार्केटमधून भाजी आणून जवळच्या वस्तीत विकण्याचा धंदा केला. गोविंदाने 250 रुपये व महादूने 300 रुपये भाजीसाठी खर्च केले. गोविंदाच्या रिक्षातून भाजी आणली म्हणून त्याला 45 रुपये देण्याचे ठरले होते. सगळी भाजी विकून 925 रुपये जमले. त्यांची वाटणी कशी करायची?

12.

मिश्र भागीदारी, चक्रवाढ व्याज, व्यस्त प्रमाण, इत्यादि

हा भाग थोडा अवघड आहे. त्याचा अभ्यास चालू करण्यापूर्वी गुणोत्तर प्रमाण, समीकरणे, सरळ व्याज, दशांश अपूर्णांक आणि आधीच्या भागातील व्यस्त प्रमाण हे भाग वाचा व त्यातील उदाहरणे सोडवण्याचा सराव करा. अशी उजळणी करून झाली की मग हा भाग अवघड वाटणार नाही.

मिश्र भागीदारी : कधी कधी दोन किंवा अधिक लोक वेगवेगळ्या संख्यांचे भांडवल गुंतवतात व त्यांच्या भांडवलांच्या प्रमाणात त्यांना फायदा किंवा तोटा होतो हे आपण पाहिले. शिवाय वेगवेगळे लोक वेगळाल्या मुदतींसाठी पैसे गुंतवतात, त्यावेळी त्यांच्या मुदतीच्या प्रमाणात त्यांना फायदा किंवा तोटा होतो. अशा प्रकारची गणिते किचकट असली, तरी आपण सोपी करून घेऊ शकतो. त्यासाठी गुंतवणूकीची मुदत वेगळ्या प्रकाराने मोजावी लागते. समजा रामने 200 रुपये भांडवल 4 महिन्यांसाठी गुंतवले व शामने 800 रुपये भांडवल 1 महिन्यासाठी गुंतवले, तर त्यांची तुलना कशी करावी? इथे 200 रुपये 4 महिन्यांसाठी म्हणजे 800 रुपये 1 महिन्यासाठी वापरायला दिले असे मानता येईल. मग या ठिकाणी राम व शाम, दोघांचेही भांडवल 1 महिन्यासाठी, सारखेच मानावे लागेल. या प्रकारची गणिते सोडवायला शिका.

उदा. 1 : कमलाने 4000 रुपये दोन वर्षांसाठी दुकानात गुंतवले, तर लीलाने 6000 रुपये 10 महिन्यांसाठी गुंतवले. दुकानाचा नफा 2600 रुपये असेल, तर प्रत्येकीला किती नफा मिळावा?

दोन वर्षे व 10 महिने यांची तुलना करायची आहे. कमलाने 4000 रुपये 2 वर्षांसाठी किंवा 24 महिन्यांसाठी म्हणजे 4000 X 24 = 96,000 रुपये एका महिन्यासाठी गुंतवले असे मानू.

लीलाने 6000 रुपये 10 महिन्यांसाठी म्हणजे 6000 X 10 = 60,000 रुपये 1 महिन्यासाठी गुंतवले. एक महिन्याची मुदत ठरवून

$$\frac{\text{कमलाचे भांडवल}}{\text{लीलाचे भांडवल}} = \frac{96,000}{60,000} = \frac{96}{60} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \frac{\text{कमलाचा नफा}}{\text{लीलाचा नफा}} = \frac{8}{5}$$

∴ कमलाचा नफा 8p तर लीलाचा नफा 5p मानू.

$\therefore 8p + 5p = 13p = 2600$

$\therefore p = \frac{2600}{13} = 200$

∴ कमलाचा नफा = 8p = 8 X 200 = 1600 रुपये
व लीलाचा नफा = 5p = 5 X 200 = 1000 रुपये.

ज्याप्रमाणे दोन अपूर्णांकांची तुलना करताना दोघांना समान छेद देतात, त्याच प्रमाणे वेगवेगळ्या भांडवलांची तुलना करताना त्यांची मुदत समान करून घ्यावी.

उदा. 2 : एका कुरणात हसनच्या 6 म्हशी 12 दिवस, नागेशच्या 8 म्हशी 10 दिवस व रामलालच्या 5 म्हशी 8 दिवस चरल्या. कुरणाचा एकूण खंड 576 रुपये असल्यास प्रत्येकाने किती खंड द्यावा?

प्रत्येकाने एकच दिवस म्हशी चारल्या असे समजू.

हसनने 6 म्हशी 12 दिवस किंवा 72 म्हशी 1 दिवस चारल्या.
नागेशने 8 म्हशी 10 दिवस म्हणजे 80 म्हशी 1 दिवस चारल्या.
रामलालने 5 म्हशी 8 दिवस म्हणजे 40 म्हशी 1 दिवस चारल्या.

∴ त्या तिघांच्या खंडांचे गुणोत्तर 72:80:40

किंवा प्रत्येक संख्येला 8 ने भागून 9:10:5 असे आहे.

∴ हसनने 9k, नागेशने 10k व रामलालने 5k रुपये द्यायचे आहेत. एकूण खंड 576 रुपये आहे.

$\therefore 9k + 10k + 5k = 576$

$\therefore 24k = 576$

$\therefore k = \frac{576}{24} = \frac{96}{4} = 24.$

∴ हसनने 9 X 24 = 216 रुपये, नागेशने 10 X 24 = 240 रुपये, रामलालने 5 X 24 = 120 रुपये खंड द्यावा.

सरावाची गणिते (19) :

1) एका शेतात नांगरणी करताना जनूभाऊंचे 4 बैल 9 दिवस, शामरावांचे 6 बैल 10 दिवस व काशीनाथचे 7 बैल 4 दिवस आणले होते. त्यासाठी तिघांना मिळून 6200 रुपये दिले. तर प्रत्येकाने किती रुपये घ्यावे?

2) हिरालालने 7000 रुपये भांडवल घालून दुकान उघडले. 4 महिन्यांनी पन्नालालने त्या दुकानात 8000 रुपये भांडवल घातले. वर्षा अखेरीस 7400 रुपये फायदा झाला. तो दोघांनी कसा वाटून घ्यावा?

3) राम, शाम व विकासने भागीदारीत दुकान चालवले. रामने पहिले 6 महिने 4000 रुपये व नंतरचे सहा महिने 5000 रुपये भांडवल घातले. शामने पहिले दोन महिने काहीच भांडवल घातले नाही पण नंतरचे दहा महिने 6000 रुपये भांडवल घातले. विकासने प्रथम 6000 रुपये भांडवल घातले पण वर्षाच्या शेवटच्या महिन्यात 2000 रुपये भांडवल काढून घेतले. वर्षा अखेरीला एकूण नफा 18,400 रुपये झाला. तर तो तिघांनी कसा वाटून घेतला?

4) सीमा व नीला यांनी वह्या-पुस्तकांचे दुकान नीलाच्या आईच्या घरात काढले. दुकानाच्या साहित्यासाठी सीमाने 2400 रुपये तर लीलाने 3000 रुपये खर्च केले. नीलाच्या आईला दुकानाचे भाडे दरमहा 200 रुपये देण्याचे ठरले होते. महिना अखेरीला जमलेल्या फायद्याचे 2900 रुपये त्यांनी कसे वाटून घेतले?

5) एका कुरणात कुशाभाऊंचे 4 बैल 6 आठवडे, रामभाऊंचे 5 बैल 4 आठवडे व केशवरावांचे 6 बैल तीन आठवडे चरले. कुरणाच्या मालकाला एकूण 3100 रुपये द्यायचे आहेत तर कुशाभाऊंनी त्यापैकी किती रुपये दिले पाहिजेत?

चक्रवाढ व्याज

अनेकदा कर्ज किंवा ठेव अधिक मुदतीसाठी असल्यास, त्यावर सरळ व्याज आकारले जात नाही. त्याचे कारण पुढील उदाहरणातून स्पष्ट होईल. समजा एका माणसाने द.सा.द.शे. 15 दराने 400 रुपये कर्ज काढले. तर एक वर्षानंतर त्याने मुद्दल + व्याज = 400 + 60 = 460 रुपये परत करायचे असतात. पण वर्ष अखेर त्याने मुद्दल किंवा व्याज यापैकी काहीच दिले नाही, तर दुसऱ्या वर्षामध्ये त्याने 460 रुपये कर्ज काढले आहे असा अर्थ होतो. मग दुसऱ्या वर्षासाठी मुद्दल = 460 व व्याज = $\frac{460 \text{ X } 15}{100}$ = 69 असा हिशोब होऊन दुसऱ्या वर्षा अखेरीला तो 460 + 69 = 529 रुपये देणे लागतो. आता यापैकी काहीच दोन वर्षांनंतर फेडले नाही, तर तिसऱ्या वर्षासाठी त्याचे कर्ज 529 रुपये धरून त्यावर व्याज आकारले जाते. अर्थात्

1 वर्षानंतरची रास = दुसऱ्या वर्षाचे मुद्दल,

2 वर्षानंतरची रास = तिसऱ्या वर्षाचे मुद्दल,

3 वर्षानंतरची रास = चौथ्या वर्षाचे मुद्दल.

याप्रमाणे दर वर्षी मुद्दल व त्याच प्रमाणे व्याजही वाढत जाते. म्हणून याला चक्रवाढ व्याज असे म्हणतात. त्याच दराच्या सरळ व्याजापेक्षा, चक्रवाढ व्याज अधिक प्रमाणात वाढत जाते.

चक्रवाढ व्याजाची गणिते जरा अवघड असतात. पण त्यामागचे तत्त्व समजावून घेऊन, जरूर वाटल्यास दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग करून गणिते सोडवण्याचा भरपूर सराव केला, तर त्यात कठीण काही नाही. दशांश अपूर्णांक वापरून 1 रुपये मुद्दलाची दिलेल्या मुदतीची रास काढून त्यावरून कुठल्याही मुद्दलाची रास काढता येते. मात्र त्या पद्धतीने एकदम रास मिळते, त्यावरून व्याज काढावे लागते.

उदा. 1 : चक्रवाढ व्याजाने 500 रुपये मुद्दलाची द.सा.द.शे. 10 दराने 3 वर्षांची रास किती होईल?

दर वर्षी व्याजाची आकारणी करताना $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर $\frac{110}{100}$ असेच आहे. 1 रुपयाची 1 वर्षाने रास होईल $1 \times \frac{110}{100} = 1.1$ रुपया. दुसऱ्या वर्षी मुद्दल 1.1 रुपये आहे. म्हणजेच $\frac{11}{10}$ रुपये मुद्दल आहे. त्यावर ग रास असेल, तर $\frac{\text{ग}}{11/10} = \frac{11}{10}$ ∴ $\text{ग} = \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$. म्हणजेच दुसऱ्या वर्षानंतर रास $\frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = 1.21$ रुपये झाली. तिसऱ्या वर्षी मुद्दल $1.21 = \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$ आहे. त्याची तिसऱ्या वर्षानंतर रास र असेल, तर $\frac{\text{र}}{1.21} = \frac{11}{10}$. ∴ $\text{र} = \frac{11}{10} \times 1.21 = \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$. आता 1 रुपया मुद्दलाची तीन वर्षांनंतर रास $\frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = 1.331$ आहे. ∴ 500 रुपये मुद्दलाची तीन वर्षांनंतर रास $500 \times 1.331 = 665.5$ रुपये. इथे 1 रुपयाची रास काढून मुद्दलाने तिला गुणून त्या मुद्दलाची रास काढली. 1 रुपयाची रास काढताना दशांश अपूर्णांक वापरणे सोयीचे असते.

उदा. 2 : 8000 रुपये मुद्दलाचे द.सा.द.शे. 16 दराने चक्रवाढ व्याजाने 2 वर्षांनंतर किती व्याज होईल? सरळ व्याजाने त्याच दराने किती होईल?

चक्रवाढ व्याजाने 1 रुपयाची रास काढणे व त्यावरून दिलेल्या मुद्दलाची रास काढणे सोपे जाते. राशीतून मुद्दल वजा करून व्याज मिळते.

1 रुपयाची एका वर्षाने रास $\frac{116}{100}$ होईल, तर 2 वर्षांनी रास $\frac{116}{100} \times \frac{116}{100}$ एवढी होईल.

∴ 8000 रुपये मुद्दलाची 2 वर्षांनी रास $8000 \times \frac{116}{100} \times \frac{116}{100}$ एवढी होईल.

$$\text{रास} = \frac{8000 \times 116 \times 116}{100 \times 100} = \frac{107{,}648}{10} = 10{,}764.8 \text{ रुपये.}$$

∴ 8000 रुपये मुद्दलाचे 2 वर्षांनी व्याज = 10,764.8 - 8000

= 2764.8 रुपये.

द.सा.द.शे. 16 दराने 100 रुपयांवर 2 वर्षांनी सरळ व्याज 32 रुपये.

∴ 8000 रुपयांवर 16 दराने 2 वर्षांचे सरळ व्याज

= 2560 रुपये एवढे होईल.

उदा. 3 : स्वातीने 500 रुपये 2 वर्षांसाठी द.सा.द.शे. 11 दराने सरळ व्याजाने कर्जाऊ घेतले. तर ज्योतीने तेवढेच पैसे द.सा.द.शे. 10 दराने चक्रवाढ व्याजाने घेतले. दोघींनीही 2 वर्षांनी पैसे व्याजासहित फेडले. तेव्हा कुणाला जास्त पैसे द्यावे लागले?

स्वातीचे कर्ज सरळ व्याजाने होते. 100 रुपयांवर 2 वर्षांत 22 रुपये व्याज.
∴ 500 रुपये मुद्दलावर 2 वर्षांत 5 X 22 = 110 रुपये व्याज झाले.

ज्योतीचे पहिल्या वर्षी अखेर द.सा.द.शे. 10 दराने 50 रुपये व्याज झाले. दुसऱ्या वर्षी 550 रुपये मुद्दलावर $550 \times \frac{10}{100} = 55$ रुपये व्याज झाले. ∴ ज्योतीने एकूण $550 + 55 = 605$ रुपये दिले, तर स्वातीने $500 + 110$ रुपये दिले.

∴ स्वातीला $610 - 605 = 5$ रुपये जास्त द्यावे लागले.

ज्योतीच्या कर्जाची रास, 1 रुपयाची $1.1 \times 1.1 = 1.21$ अशी होते.
∴ 500 रुपयांची $500 \times 1.21 = 605$ रुपये होते असेही काढता येईल.

सरावाची गणिते (20) :

1) 400 रुपये कर्जावर द.सा.द.शे. 12 रुपये प्रमाणे 2 वर्षांचे चक्रवाढ व्याज किती होईल?

2) 500 रुपये मुद्दलावर द.सा.द.शे. 17 रुपये दराने सरळ व्याजाने, 2 वर्षांनी किती व्याज द्यावे लागेल? त्याच मुद्दलावर द.सा.द.शे. 16 दराने 2 वर्षांनी चक्रवाढ व्याज किती होईल?

3) 45,000 रुपये चक्रवाढ व्याजाने द.सा.द.शे. 12 दराने कर्जाऊ घेतले. 2 वर्षांनी कर्ज फेडताना किती रुपये द्यावे लागतील?

4) द.सा.द.शे. 15 रुपये दराने चक्रवाढ व्याजाने 6000 रुपये कर्ज दिले. तर तीन वर्षांअखेरीस किती रुपये परत मिळावेत?

5) द.सा.द.शे. 18 दराने चक्रवाढ व्याजाने एका मुद्दलाची 2 वर्षांनी रास होते 13,924 रुपये. तर मुद्दल किती होते?

6) द.सा.द.शे. 16 दराने सरळ व्याजाने रामने 9000 रुपये कर्ज काढले. तर शामने तेवढीच रक्कम 15 दराने चक्रवाढ व्याजाने कर्जाऊ घेतली. दोन वर्षांनी दोघांनी आपापले कर्ज फेडले, तेव्हा कोणी जास्त रक्कम भरली?

7) द.सा.द.शे. 16 दराने चक्रवाढ व्याजाने दोन वर्षांनी रास 4036.8 रुपये झाली. तर दोन वर्षांत एकूण व्याज किती झाले?

8) एक कंपनी त्यांच्याजवळ ठेवलेल्या ठेवींवर चक्रवाढ व्याजाने 12 रुपये दराने व्याज देते. एक ठेकेदार त्याच्याजवळ ठेवलेली ठेव तीन वर्षांनी दीडपट करून देतो. कुणाकडे तीन वर्षांसाठी ठेव ठेवणे जास्त फायद्याचे आहे?

व्यस्त व मिश्र प्रमाण

व्यस्त व मिश्र प्रमाणाची साधी गणिते करायला आपण शिकलो आहोत. आता जरा कठीण, मिश्र प्रमाणाची गणिते करू. या पद्धतीत अनेकांवरून एकाचा, एकावरून अनेकांचा पायरी पायरीने विचार केला की गणित सुटत जाते.

उदा. 1 : 5 मजूर रोज 6 तासांप्रमाणे काम करून 28 दिवसांत काम संपवतात. तर 7 मजूर रोज 8 तासांप्रमाणे काम करून तेच काम किती दिवसांत संपवतील?

5 मजूर रोज 6 तासांप्रमाणे 28 दिवस घेतात.

∴ 5 मजूर रोज 1 तासाप्रमाणे 28×6 दिवस घेतील.
(तास व दिवस यांचे व्यस्त प्रमाण.)

∴ 1 मजूर रोज 1 तासाप्रमाणे $28 \times 6 \times 5$ दिवस घेईल.
(मजूर व दिवस यांचे व्यस्त प्रमाण.)

∴ 7 मजूर रोज 1 तासाप्रमाणे $\frac{28 \times 6 \times 5}{7}$ दिवस घेतील.

∴ 7 मजूर रोज 8 तासांप्रमाणे $\frac{28 \times 6 \times 5}{7 \times 8}$ दिवस घेतील.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{\overset{\cancel{4}}{\cancel{28}}}} \times 6 \times 5}{\underset{1}{\cancel{7}} \times \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 15$$

∴ 7 मजूर रोज 8 तासांप्रमाणे 15 दिवस घेतील.

हे गणित कसे पायरी पायरीने सोडवले आहे पहा.

दिलेली माहिती नीट एका ओळीत लिहिली.

त्यानंतर एकेका ओळीत, एका प्रकारच्या संख्येत बदल करत कामास लागणारे दिवस लिहिले. 6 तासांऐवजी 1 तास, 5 मजुरांऐवजी 1 मजूर अशा वेळी लागणारे दिवस, नंतर 1 तासाऐवजी 8 तास, 1 मजुराऐवजी 7 मजूर असा बदल करत पाच ओळीत उत्तर मिळवले.

अशा गणितात सूत्र पाठ करण्याची जरूरी नाही. सूत्र मांडताना जराशी चूक झाली तरी गणित चुकते.

शिवाय 28 X 6 X 5 हा गुणाकार करण्याची घाई केली नाही. दिवसांची संख्या 28 X 6 X 5 अशी, गुणाकाराच्या स्वरूपातच लिहिली. त्यामुळे $\frac{28 \times 6 \times 5}{7 \times 8}$ हा भागाकार करणे सोपे झाले.

मोठे गुणाकार व भागाकार व त्यांच्यामुळे लागणारा वेळ, चुका हे सर्व टाळता आले.

उदा. 2 : एक कामगार एका फेरीत 18 विटा नेतो. 22 कामगारांना काही विटा नेण्यास 40 फेऱ्या कराव्या लागल्या. एकूण 24 कामगार लावले व प्रत्येकाने एका फेरीत 20 विटा नेण्याचे ठरवले, तर त्याच विटा नेण्यास किती फेऱ्या लागतील?

1 कामगार 1 फेरीत 18 विटा नेतो.

∴ 22 कामगार 1 फेरीत 18 X 22 विटा नेतात.

∴ 22 कामगार 40 फेऱ्यांत 18 X 22 X 40 विटा नेतात.

∴ नेण्याच्या एकूण विटा 18 X 22 X 40.

एका फेरीत 20 विटा नेल्यास

1 कामगारास $\frac{18 \times 22 \times 40}{20}$ फेऱ्या लागतील.

∴ 24 कामगारांना $\frac{18 \times 22 \times 40}{20 \times 24}$ फेऱ्या लागतील.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{18}} \times \overset{11}{\cancel{22}} \times \cancel{40}}{\underset{1}{\cancel{20}} \times \underset{4}{\cancel{24}}} = \frac{3 \times 11 \times \overset{1}{\cancel{4}}}{1 \cancel{4}} = 33$$ फेऱ्या लागतील.

इथे देखील एकेका ओळीत एकेका संख्येत बदल केला. 18 X 22 X 40 हा गुणाकार करण्याची घाई केली नाही. उत्तर $\frac{18 \times 22 \times 40}{20 \times 24}$ असे आल्यावर अंश व छेद यातून समान अवयव काढून उत्तर सोपे केले.

या पद्धतीत चुका होण्याची शक्यता कमी आहे.

सरावाची गणिते (21) :

1) एक पाण्याने भरलेली टाकी दोन नळ बारा तास सोडले तर रिकामी होते. तीन नळ सोडले तर टाकी किती वेळात रिकामी होईल?

2) प्रत्येक मुलीने रोज 12 कागद टाइप केले, तर 9 मुलींना संपूर्ण पुस्तक टाइप करायला 15 दिवस लागले. रोज 15 कागद टाइप करणाऱ्या 18 मुलींना टाइप करायला सांगितल्यास पुस्तक किती दिवसात टाइप करून होईल?

3) एका हौदात पाणी भरण्यास 10 मजूर लावले. प्रत्येक मजूर तासाला 11 बादल्या पाणी भरतो. या मजुरांना हौद भरण्यास 7 तास लागले. प्रत्येक मजूर ताशी 14 बादल्या पाणी भरू लागला व असे 11 मजूर कामाला लावले, तर हौद भरण्यास किती तास लागतील?

4) एक शेत 6 बैल 4 दिवसांत नांगरतात. त्या शेताच्या दुप्पट क्षेत्रफळाचे शेत 8 बैल किती दिवसांत नांगरतील?

13.

उदाहरण संग्रह —— पाचवी साठी

1. खालील अपूर्णांकांच्या जोड्या तपासून, प्रत्येक जोडीत $<$, $>$ किंवा $=$ या पैकी योग्य ते चिन्ह घाला.

a) $(\frac{5}{6} \quad \frac{2}{3})$
b) $(\frac{1}{4} \quad \frac{3}{12})$
c) $(\frac{8}{11} \quad \frac{4}{7})$
d) $(\frac{3}{8} \quad \frac{2}{7})$
e) $(\frac{4}{9} \quad \frac{8}{18})$
f) $(\frac{1}{10} \quad \frac{1}{11})$
g) $(\frac{4}{7} \quad \frac{7}{11})$
h) $(\frac{3}{10} \quad \frac{2}{5})$
i) $(\frac{2}{3} \quad \frac{16}{24})$
j) $(\frac{6}{7} \quad \frac{7}{8})$

2. खालील बेरजा व वजाबाक्या करा.

a) $\frac{5}{6} + \frac{2}{7}$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
c) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$
d) $4 - \frac{9}{10}$
e) $2 + \frac{1}{3}$
f) $2 - \frac{1}{3}$
g) $\frac{16}{11} - 1$
h) $\frac{4}{7} + \frac{1}{3}$

3. a) पुढीलपैकी कोणत्या संख्यांना 3 ने पूर्ण भाग जातो?
41, 42, 60, 32, 72, 74, 105, 203.

b) पुढीलपैकी कोणत्या संख्यांना 5 ने पूर्ण भाग जातो?
21, 40, 32, 65, 90, 123, 485, 2017, 4095

c) पुढीलपैकी कोणत्या संख्यांना 2 ने पूर्ण भाग जातो?
12, 61, 41, 42, 65, 90, 74, 105, 2018, 3085.

4. खालील अपूर्णांक दशांश अपूर्णांकांच्या रूपात लिहा.

$\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{32}{10}, \frac{4}{100}, \frac{72}{100}, \frac{64}{1000}, \frac{8}{1000}.$

5. खालील भागाकार व गुणाकार चटकन करा.

a) $43.07 \div 10$
b) 132.78×100
c) $3.9 \div 100$
d) 6.7×100
e) $2.94 \div 100$
f) 6.03×100
g) $4.71 \div 1000$
h) 5.89×100

6. दिलेल्या संख्यांचा म.सा.वि. म्हणजे काय?
दिलेल्या संख्यांचा ल.सा.वि. म्हणजे काय?

7. खालील संख्यांचे म.सा.वि. काढा.

a) 40, 25
b) 96, 24, 72
c) 54, 90, 108.

8. खालील संख्यांचे ल.सा.वि. काढा.

a) 24, 56

b) 25, 60

c) 18, 24, 54.

9) खालील समीकरणे सोडवून अक्षरांच्या किंमती काढा.

a) क + 8 = 25

b) 3ब - 4 = 50

c) 5म + 3 = म + 87

d) 62 - म = -5

e) 16 - 6क्ष = -26

f) $\frac{2अ}{3} - 4 = 2$

g) $7 - \frac{3प}{7} = 4$

h) $2क - 8 = \frac{क}{2} + 7$.

10. नामदेवला दूध विकण्याबद्दल शेकडा आठ रुपये कमिशन मिळते. एका आठवड्यात त्याने 21,000 रुपयांचे दूध विकले, तर त्याला किती कमिशन मिळाले?

11. मीना कपडे शिवून पैसे मिळवते व तिच्या कमाईच्या शेकडा 40 रुपये आईला घरखर्चासाठी देते. एका महिन्यात तिने प्रत्येकी 10 रुपये घेऊन 25 ब्लाऊज शिवले, तर त्यातले किती आईला दिले?

12. सुरेशला मराठीत 75 पैकी 42 व गणितात 150 पैकी 99 मार्क मिळाले. कुठल्या विषयात जास्त चांगले मार्क मिळाले?

14.

उदाहरण संग्रह — सहावीसाठी

1. शाळेतील लहान मुलांना चॉकोलेटं वाटायची आहेत. 65 मुलं असतील, तर 260 चॉकोलेटं लागतात. 132 मुलांसाठी, त्याच प्रमाणात किती चॉकोलेटं लागतील?

2. एका फळबागेत एकूण 1250 झाडे आहेत. त्यातील 60 टक्के आंब्याची, 20 टक्के जांभळाची व उरलेली नारळाची झाडे आहेत. तर नारळाची झाडे किती आहेत?

3. सुरेशने एक टी.व्ही. 2400 रुपयांना विकत घेतला व तो 22% नफा घेऊन विकला तर विक्रीची किंमत काय?

4. मनोजला दरमहा 850 रुपये पगार मिळतो व महेशला दरमहा 1200 रुपये मिळतात. मनोज आईजवळ घरखर्चासाठी 510 रुपये देतो व महेश 600 रुपये देतो. पगाराच्या मानाने कोण घरखर्चासाठी जास्त पैसे देतो?

5. खालील अपूर्णांक दशांश अपूर्णांकाच्या रूपात लिहा.
$\frac{2}{5}, 3\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{62}{25}, 2\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$.

6. खालील अपूर्णांक व्यवहारी किंवा परिमेय अपूर्णांकाच्या रूपात लिहा.
23.5, 1.07, .84, 60.06, .03, 17.905

7. पन्नालाल व हिरालाल यांनी मिळून दुकान काढले. पन्नालालने 2500 रुपये गुंतवले व हिरालालने 2000 रुपये गुंतवले. महिना अखेरीस 1800 रुपये फायदा झाला तर तो कसा वाटावा?

8. एका फळ विक्रेत्याने प्रत्येकी 100 रुपये प्रमाणे आंब्याच्या 6 पेट्या घेतल्या. प्रत्येक पेटीत 4 डझन आंबे होते. ते आंबे 30 रुपये डझन प्रमाणे विकले तर नफा किती टक्के झाला?

9. धर्मेंद्रने 50 रुपयांना एक या प्रमाणे 15 शर्ट विकत घेतले. त्यातील 12 शर्ट त्याने 70 रुपयांस एक या प्रमाणे विकले. शेवटचे 3 शर्ट कमी किमतीस विकले. या सगळ्या व्यवहारात त्याला शेकडा 30 रुपये फायदा झाला. तर उरलेले तीन शर्ट त्याने किती रुपयांना विकले?

10. रमेशने 250 रुपयांना एक या प्रमाणे एक डझन रेडिओ मुंबईहून खरेदी करून आणले. ते कोल्हापूरला आणण्यास रेल्वे खर्च 250 रुपये व रिक्षा भाडे 50 रुपये लागले. नंतर त्याने ते रेडिओ आपल्या दुकानात 350 रुपयांना एक या प्रमाणे विकले. या व्यवहारात नफा किती टक्के झाला?

11. रोहिणीजवळ निळ्या, पिवळ्या व लाल रंगाचे मणी अनुक्रमे 240, 180 व 360 आहेत. तिला त्यांच्या, एकेका रंगाच्या माळा करायच्या आहेत. प्रत्येक माळेत सारखेच मणी हवेत. जास्तीत जास्त किती मणी प्रत्येक माळेत घालता येतील?

12. एका शाळेतील मुलांपैकी प्रत्येकी 20 मुलांच्या किंवा 25 मुलांच्या रांगा केल्या, तर काहीच मुले उरत नाहीत, तर त्या शाळेत कमीत कमी किती मुले असतील?

13. रघुनाथजवळ काही लिंबे आहेत 10 लिंबांचे, 6 लिंबांचे किंवा 15 लिंबांचे असे ढीग केले तर प्रत्येक वेळी 2 लिंबे शिल्लक राहतात. त्याच्याजवळ कमीत कमी किती लिंबे आहेत?

14. मोहनजवळ 15 लिटर करडईचे तेल, 18 लिटर शेंगदाण्याचे तेल व 9 लिटर नारळाचे तेल आहे. त्याला प्रत्येक प्रकारचे तेल सारख्या आकाराच्या डब्यात भरून विकायचे आहे. जास्तीत जास्त किती मापाच्या आकाराचे डबे आणता येतील? असे डबे एकूण किती लागतील?

15. 5 किलो तांदूळ सहा माणसांना 15 दिवस पुरतो. तर तो 5 माणसांना किती दिवस पुरेल?

16. चार माणसे काही विटा एका आठवड्यात तयार करतात. त्याच्या तिप्पट विटा करण्यास सात माणसे लावली तर किती दिवस लागतील?

17. सुरेशने धंदा करण्यासाठी 1500 रुपये कर्ज घेतले. ते दोन वर्षांनी फेडताना एकूण 2100 रुपये भरले. व्याजाचा दर काय होता?

18. खालील गुणाकार करा.

i) $(6a + 7b) X 8c$
ii) $(5m - n) X 4$
iii) $(2m - 9n) X 3m$
iv) 3म X (8क - 11)
v) 17 X (3स + 5)
vi) 5 X (4ग - 9ब).

19. खालील भागाकार करा.

i) $(16a + 20b) \div 4$
ii) $(9mn + 12m) \div 3m$
iv) $(34ab - 9a) \div a$
v) (15क^2 - 20कब) ÷ 5क

iii) $(27a^2 + 108a) \div 9a$ vi) $(22म - 55) \div 11$.

20. खालील समीकरणे सोडवून अक्षरांच्या किंमती काढा.

a) $4म - 13 = 15$

b) $18 - 7क = 12$

c) $\frac{4a}{7} - 8 = 12$

d) $9 - \frac{2k}{5} = 17$

e) $14p - 11 = 8p + 13$

f) $6b + 10 = 25 + 3b$

g) $12क्ष - 37 = 17 + 7क्ष$

h) $56 - 23म = 134 - 10म$.

21. अक्षरांच्या किंमती दिल्या आहेत, त्यावरून पदावल्यांच्या किंमती काढा.

a) जर $म = 4$, तर $7म + 3$ ची किंमत

b) जर $क = 7$, तर $2क^2 - 5क$ ची किंमत

c) जर $a = 9$, तर $17a^2 - 20a$ ची किंमत

d) जर $x = 6$, तर $4x^2 + 7x$ ची किंमत

e) जर $p = 8$, तर $2p^2 - 5p + 6$ ची किंमत

f) जर $y = 11$, तर $y^2 - 15y + 70$ ची किंमत.

22. वरील उदाहरण 20 मधील समीकरणे सोडवून अक्षरांच्या आलेल्या किंमती भरून प्रत्येक समीकरणाची डावी बाजू उजव्या बाजू एवढी आहे ना हे पहा व या प्रकाराने तुमची उत्तरे बरोबर आहेत ना ते तपासा.

15.
उदाहरण संग्रह — सातवीसाठी

सूचना : अधिक चांगला सराव होण्यासाठी, आधी पाचवी व सहावीसाठी असलेले संग्रह सोडवा म्हणजे आपोआप उजळणी चांगली होईल व सातवीचा संग्रह सोपा वाटू लागेल.

1. पुढील अपूर्णांकांना तीन दशांश स्थळांपर्यंत दशांश अपूर्णांकांचे रूप द्या.

$\frac{7}{25}, \frac{6}{13}, \frac{52}{25}, \frac{5}{7}, \frac{14}{11}, \frac{16}{5}, \frac{275}{8}, \frac{913}{12}$.

2. तीन दशांश स्थळांपर्यंत भागाकार करा.

a) $25.4 \div 8$

b) $4.02 \div 5$

c) $83.27 \div 11$

d) $670.9 \div 7$

e) $5194 \div 12$

f) $723 \div 9$.

3. खालील अपूर्णांकांचे आवर्ती रूप लिहा.

$\frac{2}{13}, \frac{4}{7}, \frac{5}{11}, \frac{19}{9}$.

4. पुढील बहुपदींच्या बेरजा करा.

i) $(m + 4n - 12) + (3m - 2n + 7)$

ii) $(5a + 2b + 8) + (3a - 6b - 13)$

iii) $(6a - 5b - 2) + (-10a + 7b - 8)$

iv) $(3m + 5n - 11) + (2m - 13n)$

5. खालील गुणाकार करा.

i) (3u - 4v)(7u + 2v)

ii) (6a + b - 8)(2a - 3b)

iii) (5म - 11न)(3म + 4न - 2)

iv) (22स - 5ग)(-स - 3ग + 4)

v) (a + 2b)(a - 2b)

vi) (a + 3b)(a + 3b)

6. अपूर्णांकांच्या, खालील पदावल्या सोडवा.

i) $\frac{3}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

ii) $\frac{7}{9} - (\frac{3}{4} - \frac{2}{3})$

iii) 40.52 + 23.08 - 36.95

iv) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} - (\frac{3}{10} - \frac{4}{5})$

v) $\frac{3}{8} + 2.15 - \frac{3}{4}$

vi) $\frac{17}{5} + \frac{1}{2} - 2.97$.

7. 8 माणसे एक भिंत तीन दिवसांत बांधतात. तर 6 माणसांना तीच भिंत बांधण्यास किती दिवस लागतील?

8. 4 बैलांना 5 दिवसांसाठी 40 पेंड्या चारा लागतो. तर 7 बैलांना 7 दिवसांत किती पेंड्या लागतील?

9. मधुकर व सुधाकर यांनी भागीदारीत वर्षभर दुकान चालवले. मधुकरने 5000 रुपये भांडवल 10 महिन्यांसाठी घातले, तर सुधाकरने 4000 रुपये पूर्ण वर्षासाठी घातले. वर्षा अखेरीस नफा 1960 रुपये झाला. तर तो दोघांनी कसा वाटून घ्यावा?

10. गजाभाऊंनी दलालामार्फत एक ट्रॅक्टर 3 टक्के दलाली देण्याचे कबूल करून घेतला. ट्रॅक्टरची किंमत 7500 रुपये असल्यास गजाभाऊंना एकूण खर्च किती आला?

11. मैनाताईंनी मालूताईंची खानावळ चालवायला घेतली व आलेल्या नफ्यातून 20 टक्के रक्कम मालूताईंना देण्याचे ठरले. वर्षा अखेरीस मैनाताईंनी मालूताईंना 5400 रुपये दिले तर मैनाताईंना वर्षभरात किती नफा झाला?

12. सुरेशने धंद्यासाठी द.सा.द.शे. 12 रुपये दराने चक्रवाढ व्याजाने 8000 रुपये कर्ज काढले; दोन वर्षांनंतर कर्ज फेड करताना त्याला एकूण किती रुपये द्यावे लागतील?

13. रघू, धर्मा व भिकू यांनी रसाचे गुऱ्हाळ चालवले. रघूने 4000 रुपये भांडवल 6 महिन्यांसाठी, धर्माने 2000 रुपये 8 महिन्यांसाठी व भिकूने 2000 रुपये वर्षभरासाठी घातले. वर्षा अखेरीस 9600 रुपये नफा झाला तर प्रत्येकाने किती नफा घ्यावा?

14. शेखर व महेश यांच्या वयांचे गुणोत्तर प्रमाण 9:8 आहे व त्यांच्या वयांची बेरीज 85 आहे. तर त्यांची वये काढा.

15. दामोदरपंतांचे शेत नांगरण्यासाठी रामाचे दोन बैल चार दिवस, भीमाचा एक बैल सहा दिवस तर धर्माचे तीन बैल तीन दिवस वापरले.

दामोदरपंतांनी तिघांना मिळून 460 रुपये देण्याचे ठरले तर प्रत्येकाला किती रुपये मिळावेत?

16. कविताचे वय आठ वर्षांनी दीडपट होईल, तर तिचे आजचे वय काय?

17. सुधाचे वय सरोजपेक्षा चार वर्षांनी जास्त आहे. दोघींच्या वयांची बेरीज 52 आहे. तर प्रत्येकीचे वय काय?

18. गिरिजाच्या जन्माच्या वेळी तिची आजी 60 वर्षांची होती. आज दोघींच्या वयांची बेरीज 90 आहे. तर गिरिजाचे आज काय वय आहे?

19. लीलावतीजवळ जेवढे रुपये आहेत, त्याच्या दुप्पट सोनीकडे आहेत. दोघींजवळ मिळून 240 रुपये आहेत. तर सोनीजवळ किती रुपये आहेत?

20. सुमतीची मोत्यांची माळ तुटली व त्यातील $\frac{3}{4}$ मोती सांडून गेले. उरलेल्या मोत्यांची तिने बांगडी बनवली. बांगडीत 19 मोती आहेत तर माळेत किती मोती होते?

21. एका परिमेय संख्येचा (किंवा व्यवहारी अपूर्णांकाचा) अंश छेदापेक्षा 7 ने लहान आहे. अंशातून 1 वजा केला व छेदात 2 मिळवले, की नवी संख्या $\frac{1}{2}$ एवढी होते. तर तो अपूर्णांक कोणता?

22. मोहन जवळ जेवढे रुपये आहेत त्यांच्या तिपटीपेक्षा एक जास्त सोहन जवळ आहेत. मोहनला 5 व सोहनला 2 रुपये दिले तर सोहन जवळ मोहनच्या रकमेच्या दुप्पट रक्कम होईल. तर मोहन जवळ किती रुपये आहेत?

23. गुंडूजवळ जेवढ्या गोट्या आहेत त्यांची दुप्पट करून त्यात 2 मिळवले की जी संख्या येते, तेवढ्या गोट्या बंडूजवळ आहेत. बंडू जवळच्या गोट्यांच्या $\frac{1}{4}$ गोट्या खंडूजवळ आहेत. तिघांजवळ मिळून 48 गोट्या आहेत तर बंडूजवळ किती गोट्या आहेत?

16.
अधिक डोके चालवा किंवा बुद्धीला अधिक चालना

संग्रह 1 :

1. 3 व 4 हे अंक घेऊन बनणाऱ्या सगळ्या दोन अंकी संख्या लिहा व त्यांची बेरीज करा.

2. 1, 2 व 3 हे अंक घेऊन, प्रत्येक अंक एकदाच वापरून बनणाऱ्या सर्व संख्या लिहा व त्यांची बेरीज करा.

3. रामानुजन नंबर 1729 याचे सगळे मूळ अवयव शोधा व चढत्या भाजणीत लिहा. त्यांच्या मधील संबंध ओळखा.

4. 18, 25 व 35 यांनी भाग जाईल अशी मोठ्यात मोठी चार अंकी संख्या लिहा.

5. 16, 24 व 30 यांनी भाग जाईल अशी लहानात लहान पाच अंकी संख्या शोधा.

6. दोन संख्यांच्या म.सा.वि. व ल.सा.वि. यांची बेरीज 93 आहे. ल.सा.वि. हा म.सा.वि. च्या 30 पट आहे. दोन संख्यांपैकी एक 18 असेल, तर दुसरी संख्या शोधा.

7. 2, 4, 5 व 7 या पैकी प्रत्येक अंक एकदाच वापरून, 25 ने भाग जाईल अशा सर्व संख्या लिहून त्यांची बेरीज करा.

8. 5 खुर्च्यांची खरेदीची किंमत ही चार खुर्च्यांच्या विक्रीच्या किंमती एवढी आहे. तर नफा किती टक्के आहे?

9. सोनू व मोनू यांच्या वयांची बेरीज 18 आहे. तीन वर्षांपूर्वी सोनूचे वय मोनूच्या वयाच्या तिप्पट होते. त्यांची आजची वये काय?

10. एक संख्या दुसऱ्या संख्येपेक्षा 5 ने जास्त आहे. दोन्ही संख्यांची बेरीज 19 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

11. तीन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 39 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

12. दोन संख्यांमधला फरक 4 आहे. मोठ्या संख्येची तिप्पट व लहान संख्येची चौपट यांची बेरीज 61 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

13. 24 वर्षांनंतर मोहनचे वय त्याच्या आजच्या वयाच्या चौपट होईल. तर त्याचे आजचे वय काय?

14. एका क्रिकेट मॅचमध्ये सचिनने 84 धावा केल्या. त्या अजयच्या धावांच्या तिप्पट आहेत व अझरच्या धावांपेक्षा 20 ने जास्त आहेत. तिघांच्या मिळून किती धावा झाल्या?

15. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, तर $6 + 7 + 8 + \dots + 20 =$ किती?

16. खाली दिलेली माहिती अक्षर वापरून समीकरणात लिहा.

i) एका संख्येचा $\frac{2}{3}$ घेऊन त्यात 5 मिळवले, की 23 मिळतात.

ii) एका संख्येची तिप्पट ही त्याच संख्येच्या $\frac{1}{3}$ पेक्षा 40 ने जास्त आहे.

iii) क्रमवार येणाऱ्या तीन विषम संख्यांची बेरीज 33 आहे.

17. i) एका वर्गात 75 मुले आहेत. त्यातील 50 गणितात पास व उरलेली नापास झाली. पास झालेल्यांचे नापास विद्यार्थ्यांशी गुणोत्तर काय?

ii) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, bc = 45 आणि d = 15 , तर a, b, c यांच्या किंमती काढा. a, b, c, d हे पूर्णांक आहेत.

iii) $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$, तर $\frac{c}{a}$ ची किंमत काय?

18. 100 पेक्षा लहान अशी सर्वात मोठी जुळ्या मूळ संख्यांची जोडी कोणती?

19. सर्वात मोठ्या चार अंकी संख्येचे मूळ अवयव पाडा.

20. खालील समीकरणे सोडवा.

i) $\frac{x}{11} - 2 = x - 22$

ii) $19x - 0.9893 = 1$.

संग्रह 2 :

1. 742 व 1162 या दोन्ही संख्यांना भागल्यावर प्रत्येक वेळी 7 बाकी उरेल, अशी मोठ्यात मोठी संख्या कोणती?

2. जिने 6168, 2447 व 3118 या तिन्ही संख्यांना भागल्यावर समान बाकी उरेल, अशी मोठ्यात मोठी संख्या कोणती?

3. अशी मोठ्यात मोठी चार अंकी संख्या शोधा की जिच्यात 100 मिळवले की येणाऱ्या संख्येला 24 व 28 ने भाग जाईल.

4. 1000 आणि 1500 यांच्या मधल्या अशा दोन विषम संख्या शोधा, ज्यांचा म.सा.वि. 157 आहे.

5. जिने 650, 775, 1275 यांच्यापैकी प्रत्येकीला भागल्यावर समान बाकी उरेल, अशी मोठ्यात मोठी संख्या सांगा.

6. दोन संख्यांची बेरीज 384 आहे. त्यांचा म.सा.वि. 48 असेल, तर त्या संख्या कोणत्या?

7. 12, 16, 25 व 40 यांनी पूर्ण भाग जाईल अशी लहानात लहान वर्ग संख्या कोणती?

8. दोन संख्यांचा गुणाकार 892,143 आहे. त्यापैकी मोठी संख्या लहान संख्येच्या सातपट आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

9. अशा तीन संख्या शोधा, की पहिल्या व दुसऱ्या संख्येचा गुणाकार 24 आहे, दुसऱ्या व तिसऱ्या संख्येचा गुणाकार 48 आहे व पहिल्या व तिसऱ्या संख्येचा गुणाकार 32 आहे.

10. साखरेची किंमत 20% नी उतरली, तेव्हा राघवला 64 रुपयांत पूर्वीपेक्षा 2 किलो साखर जास्त मिळाली. साखरेची जुनी किंमत काय?

11. मोहनने एक शर्ट 80 रुपयांना विकत घेऊन रोहनला 10% नफा घेऊन विकला. रोहनने 25% नफा घेऊन तो राणाला विकला. तर राणाला तो किती रुपयांना मिळाला?

12. दोन परिमेय संख्यांची बेरीज $\frac{4}{5}$ आहे. त्यापैकी एक $-\frac{3}{4}$ आहे तर दुसरी परिमेय संख्या कोणती?

13. $\frac{3}{7}$ मधे कुठली परिमेय संख्या मिळवली, की बेरीज $-\frac{2}{3}$ येईल?

14. ज्या परिमेय संख्यांचे केवलमूल्य $\frac{3}{4}$ आहे, त्या सर्व परिमेय संख्या लिहा.

15. 2 पेक्षा लहान अशा पाच परिमेय संख्या लिहा.

16. दिलेल्या पर्यायांपैकी बरोबर पर्याय निवडा.

i) ज्यांचे केवलमूल्य 2 आहे, अशा संख्यांची संख्या

a) 1, b) 2, c) अनंत, d) शून्य.

ii) p, q या परिमेय संख्या असल्यास $\frac{p+q}{2}$ ही संख्या

a) p पेक्षा लहान, b) q पेक्षा मोठी, c) p व q या प्रत्येकीपेक्षा मोठी, d) p व q यांच्या मधे आहे.

17. x आणि y या दोन संख्या समान नसल्यास, $x * y = \frac{x+y}{|x-y|}$ अशी क्रिया दिली आहे. तर $(-\frac{1}{2}) * \frac{1}{3}$ ची किंमत काढा.

18. खालील संख्या शोधा.

i) (-2) चा पाचवा घात

ii) (-1) चा दहावा घात

iii) $(-\frac{1}{2})^3 \times (-\frac{2}{4})^4$

iv) $(\frac{1}{4})^0 \times (-\frac{1}{4})^2$

v) $(0.01)^{-2} \times (10)^{-3}$

vi) $(0.1)^3 \times (\frac{1}{2})^{-4}$

vii) $(4^{-2})^0$

viii) $(\frac{1}{3})^3 \times (3.3)^3$.

19. $(-3)^{-2}$ ला कशाने गुणले की गुणाकार 9 येईल?

20. खालील पदावल्या सोडवा.

i) $4\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{3} \div \frac{11}{18} - \frac{2}{3}$

ii) $4\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{3}(1\frac{1}{2} - \frac{3}{4})$

21. खालील संख्या परिमेय संख्यांच्या रूपात लिहा.

i) $2.1\overline{21}$, ii) $1.\overline{313}$, iii) $0.\overline{37}$, iv) $0.3\overline{7}$.

22. जर $\frac{p}{q} = 1.\overline{7} + 2.\overline{7}$, तर $\frac{q}{p}$ किती ते शोधा.

23. $\frac{2}{3}$ व $\frac{4}{5}$ यांच्या मधल्या चार परिमेय संख्या शोधा.

24. i) कुठल्या परिमेय संख्येचा व्यस्त नसतो?

ii) कुठली परिमेय संख्या तिच्या व्यस्ताएवढी असते?

iii) कुठली परिमेय संख्या तिच्या ऋण संख्येएवढी असते?

25. x ची किंमत काढा, जर

$(-\frac{4}{5})^{21} \times (-\frac{5}{4})^{-3} = (\frac{4}{5})^{5x-1}$.

संग्रह 3 :

1. खालील पैकी कोणत्या परिमेय संख्या आवर्ती दशांश अपूर्णांक आहेत?

a) $\frac{13}{15}$, b) $\frac{117}{160}$, c) $\frac{7}{22}$, d) $\frac{7}{8}$, e) $\frac{5}{14}$.

2. जर $\frac{a}{b} = 2.\overline{3} + 3.\overline{3}$, तर $\frac{b}{a}$ शोधा.

3. $0.\bar{2} + 0.\bar{3} + 0.\bar{4}$ ची किंमत परिमेय संख्येच्या रूपात लिहा.

4. खालील अपूर्णांक घातांकांचा वापर करून लिहा.

a) $\frac{1}{128}$, b) $-\frac{1}{343}$, c) $\frac{32}{243}$, d) $\frac{216}{625}$.

5. $\frac{1}{3} + \frac{3}{5}$ हा अपूर्णांक दशांश अपूर्णांकाच्या रूपात लिहा.

6. $\frac{1}{2}$ व $\frac{2}{3}$ यांच्या मधील चार परिमेय संख्या लिहा.

7. पुढील संख्या शोधा.

a) $(0.04)^2$, b) $\sqrt{12,321}$, c) $\sqrt{1.21}$.

8. सैनिकांच्या रांगांचा चौरस करताना, चौरसाच्या प्रत्येक घरात एकेक सैनिक घातल्यावर 3160 सैनिकांपैकी 24 सैनिक उरले. तर चौरसाच्या प्रत्येक रांगेत किती सैनिक आहेत?

9. दोन संख्यांचा गुणाकार 1200 आहे. त्यापैकी एक संख्या दुसरीच्या $\frac{3}{4}$ आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

10. दशांश अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

a) $3\frac{2}{3}$, b) $1\frac{2}{7}$, c) $\frac{56}{11}$.

11. परिमेय संख्यांत रूपांतर करा.

a) $0.2\overline{31}$, b) 1.003, c) $5.3\overline{47}$.

12. सोपे रूप द्या.

a) $\frac{0.2}{0.3 + \frac{1}{0.4}}$, b) $\frac{.6}{.3 + \frac{1}{0.4 + \frac{1}{0.5}}}$, c) $\frac{0.02}{0.8 + \frac{1}{0.2 + \frac{1}{0.4}}}$.

13. चार अंकी, सर्वात मोठी व सर्वात लहान पूर्ण वर्ग असलेली संख्या शोधा.

14. पुढे दिलेल्या गणितात, योग्य पर्याय लिहा. (a + b) रुपये दोन भागात विभागले व त्या भागांचे गुणोत्तर m:n असे आहे, n > m. तर त्या दोन्ही पैकी मोठ्या भागातील रुपयांची संख्या मूळ रुपयांच्या कोणत्या पटीत आहे?

a) $\frac{m}{m+n}$, b) $\frac{n}{m+n}$, c) $\frac{m}{n}$, d) $\frac{n}{m}$.

15. नीलेश एक काम 10 दिवसांत करतो व रमेश तेच काम 12 दिवसांत करतो. दोघे मिळून 5 दिवस ते काम करत होते. आतां उरलेले काम रमेश एकटा किती दिवसांत करू शकेल?

16. तांदुळाची किंमत आधी 20% नी वाढली. नंतर ती 20% नी कमी झाली. एकूण नवी किंमत जुन्या किंमती पेक्षा

a) 4% कमी, b) 4% जास्त, c) कमी किंवा जास्त नाही, d) 5% जास्त अशी आहे. योग्य पर्याय लिहा.

17. 30 ग्रॅम साखर 90 ग्रॅम पाण्यात घालून ढवळले, तर मिश्रणात साखरेचे प्रमाण किती टक्के आहे?

18. समुद्राच्या पाण्यात, वजनाच्या 2.5% मीठ आहे, तर 5 किलोग्रॅम पाण्यात किती मीठ असेल?

19. एका बसला 80 कि.मी. चा प्रवास 1 तास 20 मिनिटांत पुरा करायचा आहे. प्रथम 40 कि.मी. चे अंतर 50 कि.मी. तास या प्रमाणे तोडले तर आता बसचा वेग काय ठेवला की ती योग्य वेळी प्रवास पुरा करेल?

20. एक प्रवास 700 कि.मी. चा आहे. एक आगगाडी त्यापैकी पहिले 400 कि.मी. 8 तासात जाते व उरलेले अंतर ताशी 75 कि.मी. प्रमाणे जाते. तर आगगाडीचा, संपूर्ण प्रवासातील सरासरी वेग काय?

21. एक लबाड व्यापारी माल विकताना खरेदी किंमतीला, नफा न घेता विकतो असे म्हणतो पण वजन करतांना 1 किलोच्या वजनाऐवजी 900 ग्रॅमचे वजन वापरतो. तो खरोखर किती टक्के नफा मिळवतो?

22. एका दुकानाने मालावर आधी 10% व नंतर पुन्हा 10% सूट दिली. दुसऱ्या दुकानाने एकदमच 20% सूट दिली. कोणी जास्त सूट दिली?

संग्रह 4 :

1. योगेशने 80 रुपयांना एक या प्रमाणे 20 शर्ट विकत घेतले. जर प्रत्येक शर्टाची किंमत 25% नी वाढली, तर तेवढ्याच पैशात तो किती शर्ट विकत घेऊ शकेल?

2. एक दुकानदार त्याच्या मशीनवर 20% सूट देतो. तरीही त्याला 25% नफा होतो. जर त्याला प्रत्येक मशीनवर 400 रुपये नफा होतो, तर त्याच्या मशीनची खरेदी किंमत व लिहिलेली विक्री किंमत काय?

3. 7000 रुपयांचे दोन असे भाग करा की एक भाग सरळ व्याजाच्या द.सा.द.शे. 8 दराने पाच वर्षांत जेवढे व्याज मिळवेल, तेवढेच व्याज द.सा.द.शे. 10 दराने सरळ व्याजाने, दुसऱ्या भागावर 3 वर्षांत मिळेल.

4. पुढील पदावल्या सोडवा.

a) $[(3\frac{4}{5} - 2\frac{1}{5}) \div (7\frac{9}{10} - 3)] \div \frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{5} X 2\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}(6\frac{1}{4} - \frac{22}{25})$

c) $[(2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}) \div (3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{8})] X \frac{67}{48}$.

5. एक काम 8 पुरुष किंवा 12 बायका 25 दिवसांत करू शकतात. जर 6 पुरुष व 11 बायका मिळून ते काम करत असतील, तर किती दिवस लागतील?

6. साखरेच्या किंमतीत 10% सूट मिळाली तेव्हा राधिकाला 22.50 रुपये दिल्यावर, 5 किलो साखर मिळाली. 1 किलो साखरेची पूर्वीची किंमत किती होती?

7. एका माणसाने दोन घड्याळे प्रत्येकी 240 रुपयांना विकली. त्यावेळी एका घड्याळावर त्याला 25% फायदा झाला, तर दुसऱ्या घड्याळावर 25% तोटा झाला. तर दोन्ही घड्याळांच्या खरेदीची किंमत काय?

8. एक ठेव $4\frac{1}{18}$% व्याजाच्या दराने ठेवली, तर प्रत्येक दिवशी 1 रुपया व्याज मिळते. ती ठेव किती आहे?

9. प्रियाच्या वडिलांचे वय तिच्या वयाच्या दुप्पट आहे. 20 वर्षांपूर्वी तिच्या वडिलांचे वय तिच्या वयाच्या सातपट होते. आजची त्यांची वये काय?

10. एक माणूस व त्याचा मुलगा मिळून एक मैदान चोविस मिनिटांत झाडून काढतात. शेवटची 8 मिनिटे मुलगा काम करणे थांबवत असेल, तर तेच काम 30 मिनिटांत होते. तर एकटा मुलगा किती वेळात मैदान झाडून काढेल?

11. 10 वह्यांची खरेदी किंमत ही 8 वह्यांच्या विक्रीच्या किंमती एवढी आहे. तर या व्यवहारात नफा किती टक्के होतो?

12. एक ठेव बँकेत 25 वर्षांसाठी सरळ व्याजाने ठेवली, तर ती तिप्पट झाली. व्याजाचा दर काय होता?

13. जर $a + \frac{1}{a} = 2$, तर $a^4 + \frac{1}{a^4} = a^2 + \frac{1}{a^2}$ हे सिद्ध करा. $a^8 + \frac{1}{a^8}$ ची किंमत काढा.

14. खालील पदावल्यांचे गुणक पाडा.

i) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

ii) $a^4 - b^4$

iii) $(p + q)^2 - 81$.

15. खालील समीकरणे सोडवा.

i) $\frac{1}{3}(x + 4) + \frac{1}{4}(x + 5) + \frac{1}{5}(x - 6) = 10$

ii) $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - 1$

iii) $4(3x + 1) = 15x - 7$.

16. पदावल्या सोडवा.

i) $(3a - 6b)(3a + 6b)$

ii) $(1 - x^3)(1 + x^6)(1 + x^{12})(1 + x^3)$

iii) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

17. 750 रुपये कर्जावर द.सा.द.शे. $4\frac{1}{2}$ दराने सरळ व्याजाने 17 फेब्रुवारी 1988 ते 5 डिसेंबर 1988 च्या मुदतीचे व्याज किती होईल?

संग्रह 5 :

1. अनिल व सुनिल, दोघांना मिळून 700 रुपये दिले. अनिलला जेवढे पैसे दिले, त्याच्या $\frac{2}{3}$ पैसे सुनिलला दिले. तर प्रत्येकाला किती रुपये मिळाले?

2. अशी लहानात लहान संख्या शोधा, जिला अनुक्रमे 12, 15 व 18 ने भागल्यास, त्याच क्रमाने 7, 10 व 13 अशी बाकी उरते.

3. दोन संख्यांचा म.सा.वि. 3 आहे व त्यांचा गुणाकार 90 आहे. त्या दोन संख्या कोणत्या असू शकतात? सर्व शक्यता लिहा.

4. अशी मोठ्यात मोठी संख्या शोधा, जिने 63, 86 व 132 या प्रत्येक संख्येला भागल्यास समान बाकी उरते.

5. लहानात लहान असा पूर्णांक शोधा, ज्याने 98 ला गुणले असता गुणाकार हा पूर्ण वर्ग होतो?

6. दोन संख्यांचा गुणाकार 1350 आहे व त्यांचा भागाकार 6 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

7. एका शाळेतील विद्यार्थ्यांपैकी 5, 10 व 15 विद्यार्थ्यांची एक अशा रांगा करता येतात. तसेच त्या विद्यार्थ्यांनी पूर्ण चौरस देखील करता येतो. तर विद्यार्थ्यांची संख्या कमीत कमी किती आहे?

8. एक सायकलस्वार निघाल्यावर 15 मिनिटांनी, त्याच्या मागून एक मोटर निघाली. मोटारीचा वेग ताशी 40 कि.मी. व सायकलीचा वेग ताशी 20 कि.मी. आहे. मोटर सायकलीला किती अंतरावर आणि किती वेळाने गाठेल?

9. सोहन सायकलीवरून ताशी 20 कि.मी. वेगाने निघाला. मोहन त्यानंतर 2 तासांनी स्कूटरवरून सोहनच्याच मार्गाने गेला. चार तासांनंतर मोहनने सोहनला गाठले. तर मोहनच्या स्कूटरचा वेग काय होता?

10. एक कासव 1 मिनिटात 40 पावले पुढे जाते, तर गोगलगाय 30 सेकंदात 25 पावले पुढे जाते. कासवाची 15 पावले म्हणजे गोगलगायीची 50 पावले होतात. त्यांच्या वेगांचे गुणोत्तर काढा.

11. एक आयताकृति शेत 6 मीटर लांबीचे असून त्याची रुंदी 4 मीटर आहे. दुसऱ्या चौरस शेताची बाजू 5 मीटर आहे. त्या दोन्ही शेतांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा. दोन्ही शेतांच्या परिमितींचे गुणोत्तर काढा.

12. अनू बनूपेक्षा x वर्षांनी मोठी आहे. बनू सोनूपेक्षा y वर्षांनी मोठी आहे. बनूचे आजचे वय 12 असेल, तर अनू व सोनू यांची वये काय आहेत? आणखी 5 वर्षांनी तिघींच्या वयांची बेरीज किती होईल?

13. एक चौरस शेत आहे त्याची बाजू 50 मीटर लांब असून शेतामध्ये, हद्दीला लागून आतल्या बाजूने 2.5 मीटर रुंदीचा रस्ता आहे. रस्त्याचे क्षेत्रफळ किती आहे?

14. एका आयताकृति शेताची लांबी 800 मीटर व रुंदी 100 मीटर आहे. शेताच्या मध्यातून लांबीला समांतर व रुंदीला समांतर असे दोन रस्ते, 2 मीटर रुंदीचे आहेत. रस्त्यांचे क्षेत्रफळ किती आहे?

15. एका खोलीच्या चारही भिंतींचे मिळून क्षेत्रफळ 600 चौरस मीटर आहे. जमिनीचे क्षेत्रफळ 1250 चौरस मीटर आहे. खोलीची लांबी, रुंदीच्या दुप्पट आहे. तर खोलीची उंची किती आहे?

16. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 6$ असेल तर खालील पदावल्यांच्या किंमती काढा.

i) $\frac{2a+3b}{(3b+4c) \times d}$ ii) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a}$

iii) $\frac{a+b}{c} - \frac{b+c}{d} - \frac{c+d}{a}$ iv) $d^2 - (a+b)c$.

17. जर $m + \frac{1}{m} = -5$, तर $m^2 + \frac{1}{m^2}$ ची किंमत काढा.

18. जर $a + b = -1, ab = -20$, तर $a^2 + b^2$ ची किंमत काढा.

19. जर $x - \frac{1}{x} = 2$, तर पुढील पदावल्यांच्या किंमती काढा.

i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, ii) $(x + \frac{1}{x})^2$, iii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

20. $4x^2 - 8x + 1$ या पदावलीत काय मिळवले की बेरीज पूर्ण वर्ग होईल?

संग्रह 6 :

1. एका क्रिकेटच्या मॅचमध्ये सचिनने राहुलपेक्षा 22 धावा जास्त केल्या व अजयने राहुलपेक्षा 17 धावा कमी केल्या. तिघांच्या मिळून 119 धावा झाल्या. तर प्रत्येकाने किती धावा केल्या?

2. एका मुलाच्या व त्याच्या वडिलांच्या वयांची बेरीज 48 आहे. वडिलांचे वय मुलाच्या वयाच्या सातपट आहे. मुलाचे वय काय?

3. दोन क्रमवार विषम संख्यांची बेरीज 104 आहे. त्या संख्या कोणत्या?

4. एका बांबूचा अर्धा भाग चिखलात रूतला आहे, $\frac{1}{3}$ भाग पाण्यात भिजतो आहे व उरलेला 1.5 मीटर बांबू पाण्याच्या पातळीच्या वर दिसतो आहे. बांबूची एकूण लांबी किती असेल?

5. एका संख्येचा $\frac{1}{3}$ हा त्याच संख्येच्या $\frac{1}{5}$ पेक्षा 6 ने जास्त आहे. ती संख्या कोणती?

6. एका पिशवीत 1 रुपयाची जेवढी नाणी आहेत, तेवढीच नाणी 50 पैशांची आहेत. जर त्या पिशवीत एकूण 84 रुपये असतील, तर 50 पैशांची नाणी किती आहेत?

7. खालील समीकरणे सोडवा.

i) $6 + 5x - 4x = 3x + 2$ ii) $\frac{x}{3} - \frac{1}{5} = \frac{x}{5} + \frac{1}{3}$

iii) $4(3 + x) + 3(2 - x) = 2x - 3$ iv) $\frac{x-1}{2} = \frac{2x-4}{3}$

v) $x - \frac{3x-3}{4} = \frac{x-2}{3} + 1$ vi) $x - m = mx + n$

vii) $\frac{x}{p} + p = \frac{x}{q} + q,\ p \neq 0, q \neq 0$ viii) $\frac{px}{q} - \frac{qx}{p} = p^2 - q^2$, $p \neq 0, q \neq 0$.

8. दोन क्रमगत विषम संख्यांची बेरीज 74 असू शकेल? असल्यास त्या संख्या शोधा, नसल्यास कारण सांगा.

9. अवयव (गुणक) पाडा.

i) $3a^2b + 6ab^2$ ii) $a^2b - a^2c$

iii) $a^3 - ab^2$ iv) $a^2 + b^2 - 2ab - c^2$

v) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ vi) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

10. अशी मोठ्यात मोठी संख्या शोधा, की जिने 460, 580 व 688 या प्रत्येक संख्येला भागले, की समान बाकी उरेल.

11. चटकन उत्तर काढा.

i) 2512 X 2512 - 2488 X 2488

ii) 58 X 99 + 58.

12. पुढील बेरजा व वजाबाक्या करा.

i) (4a - 5b + 6) + (3a + b - 13)

ii) (5m - 2n - 9) + (-7m + 4n - 3)

iii) (-14क्ष + 10य - 8) - (2क्ष - 4य + 5)

iv) (7म - न + 11) - (5म - 6न - 9).

13. 500 रुपयांवर द.सा.द.शे. 18 दराने 3 वर्षांनी चक्रवाढ व्याज किती होईल? द.सा.द.शे. 20 दराने तेवढ्याच मुदतीत सरळ व्याज किती होईल?

14. एका आयताकृति हॉलची लांबी रुंदीच्या तिप्पट आहे. त्याची परिमिती 80 मीटर आहे. या हॉलला फरशी बसवण्यास दर चौरस मीटरला 230 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल?

15. एका आयताकृति अंगणाची लांबी 25 मीटर व रुंदी 12 मीटर आहे. त्यात एक सारख्या चौरसाकृति फरशा बसवायच्या आहेत. फरशीचे माप जास्तीत जास्त किती मोठे घेता येईल?

16. खालील संख्यांचे ल.सा.वि. व म.सा.वि. काढा.

i) 28, 112, 70 ii) 24, 12, 192

iii) 43, 129, 172 iv) 72, 216, 132.

17. चढत्या क्रमाने लिहा.

i) $\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$

ii) $0.02, \frac{3}{25}, 1.004, .009$.

18. खालील संख्यांची वर्गमुळे काढा.

$10.24, \ .0625, \ 20\frac{1}{4}$.

उत्तरे

सरावाची गणिते

(1) : पृष्ठ 4

1) 10अ - 2ब + 2क
2) 3म - 4न + 5क्ष
3) 4क + 6ख - 4ग
4) 3अ + 14ब - 35क
5) 9क - ख + ग
6) 2म + 14
7) 5म + 9न + 9
8) -6स - 9न + 6ग
9) 11अ - 10ब + 10क
10) -4क + 4म + ल.

(1a) : पृष्ठ 5

1) 7म 2) 22क - 17 3) 6अ + 15 4) $\frac{1}{2}$प + 8.

(2) : पृष्ठ 6

1) 13 2) -24 3) 40 4) 4 5) 133.

(3) : पृष्ठ 11

1) $\frac{7}{12}$ 2) $\frac{1}{15}$ 3) $\frac{4}{15}$ 4) $\frac{8}{21}$ 5) $\frac{5}{12}$

6) $\frac{1}{42}$ 7) $\frac{7}{12}$ 8) $\frac{3}{8}$ 9) $\frac{11}{12}$ 10) $\frac{8}{15}$.

(3a) : पृष्ठ 12

1) 6 2) 10 3) 12 4) 3 5) 14

6) 4 7) 3 8) 6 9) 10 10) 8.

(4) : पृष्ठ 14

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{6}{5}$ 3) 3 4) 5 5) 12

6) $\frac{27}{2}$ 7) 1 8) 2 9) 10 10) 5.

(5) : पृष्ठ 20

1) 7 2) 8 3) 6 4) 5 5) 9 6) 1

7) 10 8) $\frac{19}{5}$ 9) -6 10) 17 11) -8

12) 1 13) 7 14) -3.

(6) : पृष्ठ 27

1) 128 रुपये 2) 7 लि. 3) 252 रुपये 4) 63 रुपये

5) 204 रुपये 6) 7 लि. 7) 10 8) 5 9) 90 मी.

(7) : पृष्ठ 31

1) 1500 रुपये 2) 1680 3) 780 रुपये 4) मंगेश

5) 90,000 रुपये 6) 4,500 7) इतिहास 8) 1997 साली

9) 1000 रुपये 10) 2500 रुपये 11) रोहन 12) 6%.

(8) : पृष्ठ 39

1) 20% 2) 20% 3) 3450 रुपये 4) $23\frac{1}{13}$%

5) प्रत्येकी $12\frac{1}{2}$ रुपये 6) 80 रुपये 7) 20 रुपये

8) 500 रुपये.

(9) : पृष्ठ 44-45

1) 10 2) 702 रुपये 3) 750 रुपये

4) द.सा.द.शे. 12 रुपये 5) 6 6) द.सा.द.शे. 10 रुपये

7) 840 रुपये 8) 45,000 रुपये 9) 5 10) $2\frac{1}{2}$.

(10) : पृष्ठ 52-53

(1) 1) 532.82 2) 20.578 3) 843.27 4) 22.766

5) 63.52 6) 462.77 7) 93.06 8) 434.499

9) 115 10) 66.3001.

(2) 1) 152.24 2) .5078 3) 187,716 4) 924,000

5) 6510 6) .078 7) 53.9 8) 6040 9) 20,030

10) 45.

(3) 1) 1.28 2) .25 3) 37.667 4) 140.48

5) 136.57 6) 270 7) 309.06 8) 3.4625

9) 79.20 10) .083.

(11) : पृष्ठ 58-59

(1) 1) व्यस्त 2) सम 3) सम 4) सम 5) व्यस्त 6) व्यस्त

(2) 1) 128 2) 2 तास 40 मि. 3) 9.6 4) 3

5) 9360 रुपये.

(12) : पृष्ठ 68

1) 300, 5 2) 96, 24 3) 1050, 1 4) 540, 12

5) 270, 18.

(13) : पृष्ठ 71

1) 36 2) 144 3) 605 4) 15 5) 30 6) 428

7) 360.

(14) : पृष्ठ 76

1) 4, 816 2) 4, 5160 3) 15, 1560 4) 36, 2016

5) 27, 810 6) 24, 840.

(15) : पृष्ठ 78-79

1) $\frac{7}{4}$ 2) $-\frac{11}{12}$ 3) $6\frac{1}{7}$ 4) $-\frac{16}{15}$ 5) 0.

(16) : पृष्ठ 81

1) -3^3 2) $\frac{16}{5}$ 3) $2m^3$ 4) $\frac{5^4}{2^3}m$ 5) $\frac{9}{4}a^2$.

(17) : पृष्ठ 83

1) $12x^2 - 13x - 4$ 2) $9a^2 - 30a + 25$

3) $m^2 + 2mn + n^2$ 4) $49b^2 - 42b + 9$

5) $14a^2 + 35a + 10$ 6) $16a^2 - a - 9$

7) $-14y^2 + 49y - 32$ 8) $19k^2 - 37k + 15$

9) $-44x^2 + 24x$ 10) $37y^2 - 10y + 3$.

(18) : पृष्ठ 87

1) 224, 140 2) माया 1050 रुपये, जया 600 रुपये, सोनिया 950 रुपये 3) 3900 रुपये प्रत्येकी 4) गोविंदा 445 रुपये, महादू 480 रुपये.

(19) : पृष्ठ 90-91

1) जनूभाऊ 1800 रुपये, शामराव 3000 रुपये, काशिनाथ 1400 रुपये 2) हिरालाल 4200 रुपये, पन्नालाल 3200 रुपये 3) राम 5400 रुपये, शाम 6000 रुपये, विकास 7000 रुपये 4) सीमा 1200 रुपये, नीला 1500 रुपये, नीलाची आई 200 रुपये 5) 1200 रुपये.

(20) : पृष्ठ 94-95

1) 101.76 रुपये 2) 170 रुपये, 172.80 रुपये 3) 56,448 रुपये 4) 9125.25 रुपये 5) 10,000 रुपये 6) शामने 22.5 रुपये जास्त भरले 7) 1036.8 रुपये 8) ठेकेदाराकडे.

(21) : पृष्ठ 97

1) 8 तास 2) 6 दिवस 3) 5 तास 4) 6 दिवस

उदाहरण संग्रह 5 वी साठी : पृष्ठ 98

1. a) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4} = \frac{3}{14}$ c) $\frac{8}{11} > \frac{4}{7}$ d) $\frac{3}{8} > \frac{2}{7}$
   e) $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ f) $\frac{1}{10} > \frac{1}{11}$ g) $\frac{4}{7} < \frac{7}{11}$ h) $\frac{3}{10} < \frac{2}{5}$
   i) $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ j) $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$.

2. a) $\frac{47}{42}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{31}{10}$
   e) $\frac{7}{3}$ f) $\frac{5}{3}$ g) $\frac{5}{11}$ h) $\frac{19}{21}$.

3. a) 42, 60, 72, 105
   b) 40, 65, 90, 485, 4095
   c) 12, 42, 90, 74, 2018.

4. .3, .6, 3.2, .04, .72, .064, .008

5. a) 4.307 b)13,278 c) .039 d) 670
   e) .0294 f) 603 g) .00471 h) 589.

6. दिलेल्या संख्यांचा म.सा.वि. = त्यापैकी प्रत्येक संख्येला भागणारी मोठ्यात मोठी संख्या.
   दिलेल्या संख्यांचा ल.सा.वि. = त्यापैकी प्रत्येक संख्येने भाग जाईल अशी लहानात लहान संख्या.

7. a) 5 b) 24 c) 18.

8. a) 168 b) 300 c) 216.

9. a) 17 b) 18 c) 21 d) 67 e) 7 f) 9
   g) 7 h) 10.

10. 1680 रुपये.

11. 100 रुपये.

12. गणित.

उदाहरण संग्रह 6 वी साठी : पृष्ठ 101

1. 528. **2.** 250. **3.** 2928 रुपये. **4.** मनोज.

5. .4, 3.5, .75, 2.48, 2.75, .875.

6. $\frac{47}{2}$, $\frac{107}{100}$, $\frac{21}{25}$, $\frac{3003}{50}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3581}{200}$.

7. 1000, 800. **8.** 20%. **9.** प्रत्येकी 45 रुपये. **10.** $27\frac{3}{11}$%.

11. 60. **12.** 100. **13.** 32. **14.** 3 लिटरचे 14 डबे. **15.** 18.

16. 12. **17.** द.सा.द.शे. 20 रुपये.

18. i) $48ac + 56bc$ ii) $20m - 4n$ iii) $6m^2 - 27mn$
iv) 24मक - 33म v) 51स + 85 vi) 20ग - 45ब

19. i) $4a + 5b$ ii) $3n + 4$ iii) $3a^2 + 12$
iv) $34b - 9$ v) 3क - 4ब vi) .2म - 5

20. a) 7 b) $\frac{6}{7}$ c) 35 d) -20
e) 4 f) 5 g) $\frac{54}{5}$ h) -6.

21. a) 31 b) 63 c) 1197 d) 186 e) 94 f) 26.

उदाहरण संग्रह 7 वी साठी : पृष्ठ 105

1. .28, .462, 2.08, .714, 1.273, 3.2, 34.375, 76.083.

2. a) 3.175 b) .804 c) 7.57 d) 95.844
e) 432.833 f) 80.333

3. $.\overline{153846}$, $.\overline{571428}$, $.\overline{45}$, $2.\overline{1}$.

4. i) $4m + 2n - 5$ ii) $8a - 4b - 5$ iii) $-4a + 2b - 10$
iv) $5m - 8n - 11$.

5. i) $21u^2 - 22uv - 8v^2$ ii) $12a^2 - 16ab - 3b^2 - 16a + 24b$
iii) 15म^2 - 13मन - 44न^2 - 10म + 22न
iv) -22स^2 - 61सग + 15ग^2 + 88स - 20 ग
v) $a^2 - 4b^2$ vi) $a^2 + 6ab + 9b^2$.

6. i) $\frac{17}{40}$ ii) $\frac{25}{36}$ iii) 26.65 iv) $\frac{3}{2}$ v) $\frac{71}{40}$ vi) .93.

7. 4. **8.** 98. **9.** 1000, 960 रुपये. **10.** 7725 रुपये.

11. 27,000 रुपये. **12.** 10,035.2 रुपये.

13. 3600, 2400, 3600 रुपये. **14.** 45 व 40 वर्षे.

15. 160, 120, 180 रुपये. **16.** 16 वर्षे. **17.** 28, 24 वर्षे.

18. 15 वर्षे. **19.** 160 रुपये. **20.** 76. **21.** $\frac{11}{18}$ **22.** 7

23. 28.

अधिक डोके चालवा

संग्रह 1 : पृष्ठ 110

1. 154. **2.** 1332. **3.** 7 X 13 X 19. **4.** 9450.

5. 10,080. **6.** 15. **7.** 18,900. **8.** 25%. **9.** 12, 6.

10. 12, 7. **11.** 12, 13, 14. **12.** 7, 11. **13.** 8.

14. 176. **15.** 195.

16. i) $\frac{2a}{3} + 5 = 23$. ii) $3x = \frac{1}{3}x + 40$.

iii) $(2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) = 33$.

17. i) $\frac{2}{1}$ किंवा 2:1 ii) a = 3, b = 5, c = 9. iii) $\frac{8}{3}$.

18. 71, 73. **19.** 3 X 3 X 11 X 101.

20. i) 22 ii) .1047.

संग्रह 2 : पृष्ठ 113

1. 105. **2.** 61. **3.** 9912. **4.** 1099, 1413. **5.** 125.

6. 48, 336. **7.** 3600. **8.** 357, 2499. **9.** 4, 6, 8.

10. 8 रुपये किलो. **11.** 110 रुपये. **12.** $\frac{31}{20}$. **13.** $-\frac{23}{21}$.

14. $-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$.

15. अशा अगणित संख्या आहेत. उदा., 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, -3, $\frac{4}{5}$.

16. i) b) ii) d). **17.** $-\frac{1}{5}$.

18. i) -32 ii) 1 iii) $-\frac{1}{128}$ iv) $\frac{1}{16}$ v) 10

vi) $\frac{2}{125} = .016$ vii) 1 viii) 1.331.

19. 81. **20.** i) $26\frac{1}{3}$ ii) $\frac{95}{8} = 11\frac{7}{8}$.

21. i) $\frac{70}{33}$ ii) $\frac{1312}{999}$ iii) $\frac{37}{99}$ iv) $\frac{34}{90}$. **22.** $\frac{9}{41}$.

23. अशा अगणित संख्या आहेत. उदा., $\frac{11}{15}$, $\frac{51}{75}$, $\frac{52}{75}$, $\frac{58}{75}$, $\frac{59}{75}$.

24. i) 0 ii) 1 iii) 0. **25.** 5.

संग्रह 3 : पृष्ठ 115

1. a) $\frac{13}{15}$, c) $\frac{7}{22}$, e) $\frac{5}{14}$. **2.** $\frac{3}{17}$. **3.** 1.

4. a) 2^{-7} b) -7^{-3} c) $2^5 \cdot 3^{-5}$ d) $\frac{2^3 \cdot 3^3}{5^4}$.

5. $.9\overline{3}$. **6.** अगणित संख्या. उदा., $\frac{16}{30}$, $\frac{17}{30}$ इत्यादि.

7. a) .0016 b) 111 c) 1·1.

8. 56. **9.** 30, 40. **10.** a) $3.\overline{6}$ b) $1.\overline{285714}$ c) $5.\overline{09}$.

11. a) $\frac{229}{990}$ b) $\frac{1003}{1000}$ c) $5\frac{344}{990}$.

12. a) $\frac{1}{14}$ b) $\frac{36}{43}$ c) $\frac{27}{1580}$.

13. 9801, 1024. **14.** b). **15.** 1. **16.** a).

17. 25%. **18.** 125 ग्रॅम. **19.** ताशी 75 कि.मी.

20. ताशी $58\frac{1}{3}$ कि.मी. **21.** $11\frac{1}{9}$%. **22.** दुसऱ्या दुकानदाराने.

संग्रह 4 : पृष्ठ 118

1. 16. **2.** खरेदी 1600 रुपये छापील किंमत 2500 रुपये.

3. 3000 + 4000. **4.** a) $\frac{48}{49}$ b) $\frac{550}{537}$ c) 1. **5.** 15.

6. 5 रुपये. **7.** 192 रुपये, 320 रुपये. **8.** 9000 रुपये. **9.** 24, 48.

10. 32 मि. **11.** 20%. **12.** द.सा.द.शे. 8 रुपये. **13.** 2.

14. i) $(a + b + c)(a + b - c)$ ii) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
iii) $(p + q + 9)(p + q - 9)$.

15. i) 11 ii) 20 iii) $\frac{11}{3}$.

16. i) $9a^2 - 36b^2$ ii) $1 - x^{24}$ iii) $x^4 + x^2 + 1$.

17. 27 रुपये.

संग्रह 5 : पृष्ठ 120

1. 420, 280. **2.** 175. **3.** (6, 15), (3, 30). **4.** 23.

5. 2. **6.** (90, 15). **7.** 900. **8.** 10 कि.मी., $\frac{1}{2}$ तास.

9. ताशी 30 कि.मी. **10.** 8:3. **11.** 24:25, 1:1.

12. $12 + x, 12 - y, 51 + x - y$. **13.** 475 चौ.मी.

14. 1796 चौ.मी. **15.** 4 मीटर.

16. i) $\frac{2}{27}$ ii) $\frac{268}{315}$ iii) $-8\frac{5}{6}$, iv) 27. **17.** 23. **18.** 41. **19.** i) 6 ii) 8 iii) 34. **20.** 3 किंवा 4x.

संग्रह 6 : पृष्ठ 123

1. 60, 38, 21. **2.** 6. **3.** 51, 53. **4.** 9 मी.

5. 45. **6.** 56.

7. i) 2 ii) 4 iii) 21 iv) 5
v) 5 vi) $\frac{m+n}{l-m}$ vii) pq viii) pq.

8. अशक्य. कारण 4x = 70 ला पूर्णांकाची उकल नाही. किंवा कुठल्याही x या पूर्णांकाला, 4x = 70 असणार नाही.

9. i) $3ab(a + 2b)$ ii) $a^2(b - c)$ iii) $a(a + b)(a - b)$
iv) $(a - b + c)(a - b - c)$ v) 4ab vi) $xyz(x + y + z)$.

10. 12. **11.** i) 120,000 ii) 5800.

12. i) $7a - 4b - 7$ ii) $-2m + 2n - 12$
iii) -16क्ष + 14य - 13 iv) 2म + 5न + 20.

13. 321.516 रुपये, 300 रुपये. **14.** 69,000 रुपये. **15.** 1 मी.

16. i) 560, 14 ii) 192, 12 iii) 516, 43 iv) 2376, 12.

17. i) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ii) .009, 0.02, $\frac{3}{25}$, 1.004.

18. 3.2, .25, $\frac{9}{2}$.

विसरू नका

1. संख्येच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 असा सम अंक असेल, तर ती संख्या सम असते; म्हणजेच तिला 2 ने पूर्ण भाग जातो. उदाहरणार्थ, 20, 34, 78, 1036.

2. संख्येच्या सगळ्या अंकांच्या बेरजेला 3 ने भाग गेला तर मूळ संख्येला 3 ने भाग जातो. उदाहरणार्थ, 12, 57, 102, 504.

3. संख्येच्या एकक स्थानी 0 किंवा 5 असल्यास संख्येला 5 ने भाग जातो. उदाहरणार्थ, 40, 105, 7015.

4. संख्येच्या दशम व एकक स्थानच्या अंकांनी, म्हणजेच शेवटच्या दोन अंकांनी बनणाऱ्या संख्येस 4 ने भाग गेला, तर मूळ संख्येला 4 ने भाग जातो. उदाहरणार्थ, 5028, 232, 6008.

5. संख्येच्या सगळ्या अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग गेला, तर मूळ संख्येला 9 ने भाग जातो.

6. संख्येच्या एकक स्थानी 0 असेल, तर संख्येला 10 ने भाग जातो.

7. संख्येच्या एका आड एक येणाऱ्या अंकांच्या बेरजा करा व दोन्ही बेरजांच्या वजाबाकीला 11 ने भाग गेला, तर मूळ संख्येला 11 ने भाग जातो. उदाहरणार्थ, 5467 : $5 + 6 = 11$, $4 + 7 = 11$, $11 - 11 = 0$. $\therefore$ 5467 ला 11 ने भाग जातो. 2728 : $2 + 2 = 4$, $7 + 8 = 15$, $15 - 4 = 11$. $\therefore$ 2728 ला 11 ने भाग जातो.

8. दिलेल्या संख्यांचा म.सा.वि. म्हणजे दिलेल्या प्रत्येक संख्येला भागणारा मोठ्यात मोठा अवयव.

9. म.सा.वि. काढताना प्रत्येक संख्येचे मूळ अवयव पाडून प्रत्येक संख्येत येणाऱ्या समान अवयवांखाली रेष काढून, त्या अवयवांचा गुणाकार करा.

10. दिलेल्या संख्यांचा ल.सा.वि. म्हणजे दिलेल्या प्रत्येक संख्येने भाग जाईल अशी लहानात लहान संख्या.

11. ल.सा.वि. काढताना प्रत्येक संख्येचे अवयव पाडा, त्यात येणारा प्रत्येक अवयव जास्तीत जास्त किती वेळा एका संख्येत येतो ते पहा व तितक्या वेळा तो अवयव घेऊन, अशा सगळ्या अवयवांचा गुणाकार करा.

12. बीजगणितात सजातीय पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी करता येते. जसे 5क - 2क = 3क, 5अ - 2ब = 5अ - 2ब.

13. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया केली, तर नवे समीकरण बरोबर असते.

14. एखादे पद समीकरणाच्या एका बाजूने दुसऱ्या बाजूला नेताना त्याचे चिन्ह बदलावे लागते.

15. अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच संख्येने गुणले किंवा भागले तर त्याची किंमत बदलत नाही.

16. अपूर्णांकांची बेरीज, वजाबाकी किंवा तुलना करताना त्यांचे छेद समान करून घ्यावेत.

17. एखादी पदावली वजा करणे म्हणजे प्रत्येक पदाचे चिन्ह बदलून बेरीज करणे होय.

$(+) \times (+) = (+)$, $(-) \times (-) = (+)$,

$(+) \times (-) = (-)$, $(-) \times (+) = (-)$

हे चिन्हांचे गुणाकार विसरू नका.

18. एखाद्या कंसाला एका पदाने गुणणे म्हणजे कंसातील प्रत्येक पदाला गुणणे.

19. दोन संख्या एकाच प्रमाणात बदलत असतील, तर त्यांचे गुणोत्तर म्हणजे भागाकार कायम असतो.

20. नफा किंवा तोटा नेहमी एकूण खरेदीच्या किंमतीवर मोजला जातो.

21. सरळ व्याजाने काढलेल्या कर्जासाठी

$$\text{एकूण व्याज} = \frac{\text{व्याजदर} \times \text{मुद्दल} \times \text{मुदत}}{100}.$$

$$\text{किंवा} \quad \text{व} = \frac{\text{द} \times \text{मुद्दल} \times \text{क}}{100},$$

द = व्याजाचा दर, क = काळ किंवा मुदत.

22. दशांश अपूर्णांकाला 1000 ने गुणणे म्हणजे दशांश चिन्ह 3 घरे उजवीकडे नेणे, 100 ने भागणे म्हणजे दशांश चिन्ह 2 घरे डावीकडे नेणे.

23. व्यवहारी अपूर्णांकाने भागणे म्हणजे त्याचा व्यस्त (उलटा अपूर्णांक) करून त्याने गुणणे.

24. पदावली सोडवताना नेहमी गुणाकार व भागाकार आधी करावेत व बेरीज, वजाबाकी नंतर करावी.

✻ ० ✻ ० ✻

भास्कराचार्य प्रतिष्ठान संस्थेविषयी थोडेसे

- भास्कराचार्य प्रतिष्ठान या संस्थेची स्थापना विश्वविख्यात गणितज्ञ प्रा. श्रीराम शंकर अभ्यंकर यांनी १९७६ साली केली. गणित विषयात मूलभूत संशोधन करण्याचे संस्थेचे मूळ उद्दिष्ट असले, तरी गणिताच्या विद्यार्थ्यांना विविध स्तरांवर मार्गदर्शन करण्याचे कार्य संस्थेने हाती घेतले आहे.
- महाविद्यालयीन आणि संशोधन स्तरावरील, ख्यातनाम लेखकांनी लिहिलेली सुमारे ३५०० पुस्तके प्रतिष्ठानच्या ग्रंथालयात आहेत. ही पुस्तके विद्यार्थ्यांना संस्थेत वाचण्यासाठी किंवा घरी नेण्यासाठी उपलब्ध केलेली आहेत.
- १९९५ सालापासून संस्थेतर्फे Bona Mathematica हे महाविद्यालयीन व विद्यापीठातील विद्यार्थ्यांसाठीचे त्रैमासिक संस्थेतर्फे प्रसिद्ध केले जाते. गणित ऑलिंपियाड साठीही हे उपयुक्त आहे.
- १९९२ सालापासून विभागीय व राष्ट्रीय गणित ऑलिंपियाड साठी महाराष्ट्र व गोवा विभागासाठीचे केंद्र म्हणून संस्थेला राष्ट्रीय उच्चतर गणित मंडळाची (NBHM) मान्यता मिळाली आहे.
- संस्थेला पुणे विद्यापीठाकडून संशोधन संस्था म्हणून मान्यता मिळाली आहे.
- पुणे विद्यापीठ गणित विभाग, तसेच टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई, मेहता रिसर्च इन्स्टिट्यूट, अलाहाबाद, इत्यादी संस्थांच्या मदतीने वेळोवेळी महाविद्यालये, विद्यापीठे आणि संशोधन संस्थांमधील विद्यार्थी व शिक्षकांसाठी हिवाळी/उन्हाळी शिबिरे व इतर कार्यशाळा संस्थेतर्फे आयोजित केल्या जातात.
- कनिष्ठ महाविद्यालयीन व शालेय विद्यार्थ्यांसाठी गणित ऑलिंपियाड किंवा गणित प्राविण्य-प्रज्ञा परीक्षेचे तयारी वर्ग आयोजित केले जातात.
- NBHM कडून संस्थेला ग्रंथालयासाठी, Bona Mathematica च्या प्रकाशनासाठी आणि विविध शिबिरे व कार्यशाळा आयोजित करण्यासाठी

भरघोस अर्थसहाय्य मिळते. संस्थेच्या ठेवींमधून व देणग्यांमधून संस्थेचे शैक्षणिक कामकाज चालते.

- संस्थेने प्राचीन भारतीय गणिताची माहिती करून देण्यासाठी आर्यभट यांचा गणितपाद आणि भास्कराचार्यांचे बीजगणित यांचा मराठी अनुवाद तसेच गणित ऑलिंपियाडच्या विद्यार्थ्यांसाठी लिहिलेले एक उपयुक्त पुस्तक प्रकाशित केले आहे. भास्कराचार्य प्रतिष्ठान सहभागी असलेल्या विविध शिबिरांवर आधारित उच्च गणिताच्या विविध शाखांवरील पुस्तके प्रसिद्ध करण्याचाही संस्थेचा मनोदय आहे.
- संस्थेचा वाढता व्याप लक्षात घेता, सध्याच्या वास्तूच्या पहिल्या मजल्याचे बांधकामही आता चालू केले आहे. त्याची पूर्तता लवकरच होत आहे.

—०-०—

आंतरराष्ट्रिय गणित ऑलिंपियाड परीक्षेत चमकलेले भास्कराचार्य प्रतिष्ठानचे काही विद्यार्थी :

१. सचिन लोढा	१९९२	कांस्यपदक (मॉस्को)
२. कौस्तुभ नामजोशी	१९९२	रौप्यपदक (मॉस्को)
	१९९३	रौप्यपदक (इस्तंबुल, टर्की)
३. सुभाष खोत	१९९४	रौप्यपदक (हाँगकाँग)
	१९९५	रौप्यपदक (कॅनडा)
४. कौस्तुभ देशमुख	१९९६	रौप्यपदक (मुंबई)
५. सत्येन काळे	१९९७	कांस्यपदक (अर्जेंटिना)
६. चेतन बालवे	१९९७	रौप्यपदक (अर्जेंटिना)
	१९९८	सुवर्णपदक (तैवान)
७. मंदार जोशी	१९९९	कांस्यपदक (रुमानिया)

गणित ऑलिंपियाड स्पर्धा

गणित विषयात विशेष गती असलेल्या विद्यार्थ्यांचा शोध घेण्यासाठी जगभर निरनिराळ्या देशांत गणित ऑलिंपियाड स्पर्धा घेतल्या जातात. भारतात अशा परीक्षा १९८५ पासून सुरू झाल्या. १९८९ पासून भारताने आंतरराष्ट्रीय गणित ऑलिंपियाड स्पर्धांमध्ये भाग घेण्यास सुरवात केली.

राष्ट्रीय उच्चतर गणित मंडळातर्फे (NBHM) एकूण १६ विभागांमध्ये प्रादेशिक गणित ऑलिंपियाड स्पर्धा डिसेंबर महिन्यात आयोजित केल्या जातात. या परीक्षा ९ वी, १० वी व ११ वीच्या विद्यार्थ्यांना खुल्या असतात. प्रत्येक विभागातर्फे सुमारे २५-३० विद्यार्थ्यांची निवड केली जाते. हे सुमारे ४५० विद्यार्थी फेब्रुवारीमध्ये राष्ट्रीय गणित ऑलिंपियाड स्पर्धेत उतरतात. या स्पर्धेत पहिल्या ३० क्रमांकांत आलेल्या विद्यार्थ्यांना NBHM तर्फे मुंबई येथील उन्हाळी शिबिरासाठी आमंत्रित केले जाते. या शिबिरात विद्यार्थ्यांना तज्ज्ञ प्राध्यापकांची व्याख्याने ऐकता येतात. तसेच त्यांच्याकडून अवघड गणिते करण्याचा सराव करून घेतला जातो. या शिबिरात होण्याऱ्या निवड-परीक्षांमध्ये पहिल्या सहा क्रमांकांत येणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा भारताच्या संघात समावेश केला जातो. भारतीय संघातील विद्यार्थी त्या वर्षीच्या आंतरराष्ट्रीय गणित ऑलिंपियाड परीक्षेत (IMO) सहभागी होतात व त्यांना त्यांच्या परीक्षेतील कामगिरीप्रमाणे सुवर्ण, रौप्य, कांस्य अशी पदके मिळू शकतात.

शिबिरासाठी निवडलेल्या विद्यार्थ्यांना NBHM तर्फे गणिताचा अभ्यास पुढे चालू ठेवल्यास शिष्यवृत्तीची योजना आहे. गणिताची विशेष आवड असलेल्या विद्यार्थ्यांना चेन्नई येथील चेन्नई मॅथेमॅटिकल इन्स्टिट्यूट या संस्थेत B.Sc. चा विशेष गणिताचा अभ्यासक्रम पूर्ण करता येतो व यासाठीही NBHM तर्फे शिष्यवृत्ती मिळू शकते.

काही ख्यातनाम परदेशी विद्यापीठांमध्येही IMO मध्ये पदक मिळवलेल्या विद्यार्थ्यांना गणिताच्या उच्च शिक्षणासाठी शिष्यवृत्ती मिळू शकते.